CAPITOLO 5

Dinamica dei sistemi di corpi rigidi mediante le equazioni di Lagrange

Consideriamo ora un generico sistema nel piano composto da più corpi rigidi e indichiamo con q la coordinata libera, variabile indipendente, scelta per descriverne il moto con y la generica variabile fisica correlata alla variabile indipendente da una relazione genericamente non lineare del tipo:

$$y = y(q) \tag{5.1}$$

Adottando le equazioni di Lagrange occorre definire, dapprima in funzione delle variabili fisiche y, le diverse forme di energia che concorrono all'energia totale del sistema, ovvero l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione dissipativa e il lavoro virtuale delle rimanenti forze attive.

Per un generico sistema a 1 grado di libertà composto da n_c corpi l'energia cinetica T sarà data dalla somma delle singole energie cinetiche T_j associate alle singole masse (o momenti d'inerzia) che costituiscono il sistema:

$$T = \sum_{j=1}^{n_c} T_j = \sum_{j=1}^{n_c} \sum_{k=1}^{3} m_{kj} \dot{y}_{kj}^2 \tag{5.2}$$

in cui si è indicata con m_{kj} la generica k-esima massa (o il momento d'inerzia) del generico j-esimo corpo rigido e con $\dot{y}_{kj}$ la generica componente della velocità assoluta di traslazione del baricentro del corpo (o la velocità angolare del corpo rigido).

L'energia potenziale V, associata al campo elastico dovuto agli n_k elementi elastici di interconnessione e alla presenza di n_p forze costanti P_p (quali a esempio le forze peso) assume un'espressione generale del tipo:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_k} k_k (\Delta l_k)^2 - \sum_{p=1}^{n_p} \vec{P}_p \times \vec{y}_p = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_k} k_k \left(y_{k_1} - y_{k_2} \right)^2 - \sum_{p=1}^{n_p} \vec{P}_p \times \vec{y}_p \tag{5.3}$$

in cui k_k rappresenta la rigidezza del generico k-esimo elemento elastico. Le coordinate fisiche y_{k_1} e y_{k_2} rappresentano lo spostamento degli estremi della generica molla, nella direzione della molla stessa (per semplicità di trattazione non si considerano infatti, nella definizione dell'allungamento, gli spostamenti ortogonali

alla direzione della molla). Il vettore $\vec{y}_p$ rappresenta, invece, lo spostamento del punto d'applicazione della generica forza P_p .
Gli allungamenti delle molle $\Delta l_k = (y_{k1} - y_{k2})$ e gli spostamenti dei punti di applicazione delle forze $\vec{y}_p$ sono legati da una relazione (lineare o non lineare) all'unica coordinata libera del sistema a 1 g.d.l. q: per tale motivo l'energia potenziale V può essere sinteticamente espressa come funzione della sola variabile indipendente q: $V=V(q)$.

La funzione dissipativa, dovuta alla presenza di n_S smorzatori viscosi, ciascuno di costante r_k è definibile come:

$$(5.4) \qquad D = \frac{1}{2}\sum_{=1}^{\cdot s} r\,(\Delta\dot{l}\,)^2 = \frac{1}{2}\sum_{=1}^{\cdot s} r\,(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2$$

in cui la coordinata fisica $\Delta l_k = (\dot{y}_{k_1} - \dot{y}_{k_2})$ rappresenta la velocità relativa cui sono sottoposte le estremità del generico k-esimo smorzatore, lungo la direzione dello smorzatore stesso, senza considerare le componenti a questa ortogonali nella definizione delle velocità di allungamento,.

Consideriamo infine il lavoro virtuale $\delta^* L$ compiuto dalle rimanenti n_f forze esterne attive F_f per uno spostamento virtuale $\delta^- \vec{y}_f$ del loro punto d'applicazione. Risulta

$$(5.5) \qquad \delta^* L = \sum_{f=1}^{n_f} \vec{F}_f \times \delta\vec{y}_f$$

Abbiamo in tal modo espresso le diverse forme di energia in funzione delle variabili fisiche y.

5.1 Scrittura della equazione non lineare del moto del sistema

Avendo descritto tutte le varie forme di energia è possibile pervenire alla scrittura delle equazioni di moto del sistema applicando Lagrange tenendo conto delle varie forme di energia espresse in funzione delle variabili fisiche y e del legame tra queste e la variabile indipendente q.

Esaminiamo l'energia cinetica: la generica coordinata fisica y_j è funzione dell'unica coordinata indipendente q:

$$(5.6) \qquad y_j = y_j(q)$$

e quindi i termini di velocità della (5.2) e (5.4) varranno :

(5.7) $$\dot{y}_{jk} = \frac{dy_{jk}}{dt} = \frac{dy_{jk}}{dq}\frac{dq}{dt} = \frac{dy_{jk}}{dq}\dot{q}$$

che sostituiti, nella definizione dell'energia cinetica (5.2) porta alla seguente espressione:

(5.8) $$T = \sum_{j=1}^{n_c} T_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_c}\sum_{k=1}^{3} m_{jk}\dot{y}_{jk}^2 = \frac{1}{2}\dot{q}^2\sum_{j=1}^{n_c}\sum_{k=1}^{3} m_{jk}\left(\frac{dy_{jk}}{dq}\right)^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 = T(q,\dot{q})$$

ove il termine *a(q)* vale:

(5.9) $$a(q) = \sum_{j=1}^{n_c}\sum_{k=1}^{3} m_{jk}\left(\frac{dy_{jk}}{dq}\right)^2$$

e, poiché contiene le derivate delle coordinate fisiche rispetto alla coordinata libera *q*, può a sua volta essere funzione di quest'ultima, rendendo così non quadratica l'espressione dell'energia cinetica e quindi non lineare, per i termini inerziali, l'equazione di moto del sistema. Derivando, infatti, secondo Lagrange si ottiene:

(5.10)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = a(q)\ddot{q} + \left(\frac{da(q)}{dq}\right)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{da(q)}{dq}\right)\dot{q}^2 = a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\left(\frac{da(q)}{dq}\right)\dot{q}^2$$

Consideriamo ora l'energia potenziale *V*: la sua derivata *(dV/dq)* secondo Lagrange dà origine a un termine lineare nell'equazione del moto solo se *V(q)* è una forma quadratica in *q*: ciò accade quando y_k dipende in una forma lineare da *q*. L'espressione più generale della derivata dell'energia potenziale rispetto alla coordinata libera *q* vale infatti:

(5.11) $$\frac{dV}{dq} = \sum_{k=1}^{n_k} k_k(y_{k_2} - y_{k_1})\left(\frac{dy_{k_2}}{dq} - \frac{dy_{k_1}}{dq}\right) - \sum_{p=1}^{n_p}\vec{P}_p \times \frac{d\vec{y}_p}{dq} = f_V(q)$$

ed è quindi, in genere, a sua volta una funzione non lineare di *q*.

Passando alla funzione dissipativa *D*, essa può essere espressa come:

(5.12) $$D = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_s} r_j(\dot{y}_{j_1} - \dot{y}_{j_2})^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_s} r_j\left(\frac{dy_{j_1}}{dq} - \frac{dy_{j_2}}{dq}\right)^2\dot{q}^2 = \frac{1}{2}r(q)\dot{q}^2$$

L'energia dissipativa D non è quindi una forma quadratica in $\dot{q}$ in quanto i coefficienti moltiplicativi di tale termine sono a loro volta funzione, in genere non lineare, della variabile indipendente q. La derivazione del termine dissipativo secondo Lagrange porta dunque alla:

$$(5.13) \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \sum_{j=1}^{n_s} r_s \left(\frac{dy_{j_1}}{dq} - \frac{dy_{j_2}}{dq} \right)^2 \dot{q} = r(q)\dot{q}$$

che dà origine a un termine non lineare essendo il coefficiente $r(q)$ in genere funzione ancora di q.

Analizziamo ora il lavoro virtuale $\delta^* L$ compiuto dalle rimanenti forze attive esterne: il generico spostamento virtuale $\delta^* y_f$ del punto di applicazione della generica forzante è definibile:

$$(5.14) \qquad \delta^* \vec{y}_f = \frac{d\vec{y}_f}{dq} \delta^* q$$

Sostituendo tale relazione nell'espressione del lavoro virtuale si ottiene:

$$(5.15) \qquad \delta^* L = \sum_{f=1}^{n_f} \vec{F}_f \times \delta \vec{y}_f = \sum_{f=1}^{n_f} \vec{F}_f \times \frac{d\vec{y}_f}{dq} \delta^* q$$

L'applicazione della formula di Lagrange porta così alla definizione della componente lagrangiana Q della sollecitazione attiva esterna:

$$(5.16) \qquad Q = \frac{\delta^* L}{\delta^* q} = \sum_{f=1}^{n_f} \vec{F}_f \times \frac{d\vec{y}_f}{dq} = Q(q,t)$$

che sarà una funzione del tempo t, per la presenza di forze funzioni esplicite del tempo, e della coordinata libera q, per la presenza delle derivate delle coordinate fisiche rispetto alla coordinata libera q. Tali derivate sono costanti solo nel caso di legame $y_f = y_f(q)$ lineare.

È ora possibile scrivere per esteso l'equazione del moto del generico sistema fisico a 1 g.d.l. non lineare applicando le equazioni di Lagrange nella variabile q:

$$(5.17) \qquad a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial q} \right)\dot{q}^2 + r(q)\dot{q} + f_V(q) = Q(q,t)$$

5.3 Linearizzazione dell'equazione di moto

L'equazione del moto così ottenuta non è, in generale, integrabile analiticamente. Se interessa lo studio per grandi spostamenti, è indispensabile tener conto delle non linearità del sistema integrando numericamente l'equazione di moto.

Nel caso in cui, invece, si voglia limitare lo studio a piccoli spostamenti nell'intorno della posizione di equilibrio statico, è possibile linearizzare l'equazione di moto nell'intorno della posizione di equilibrio stessa, ottenendo, in tal modo, un'equazione lineare a coefficienti costanti. La linearizzazione delle equazioni di moto, rispetto alla integrazione numerica delle equazioni non lineari, consente l'utilizzo dei comodi algoritmi propri dell'analisi dei sistemi lineari. Ovviamente, in tal caso, è necessario dapprima trovare, se esiste, la posizione di equilibrio statico (risolvendo generalmente un'equazione non lineare) e successivamente linearizzare l'equazione di moto stessa.

La posizione di equilibrio statico viene definita risolvendo l'equazione non lineare nella variabile q che, nel caso di sistemi di forze conservativi, traduce l'equilibrio statico:

$$\frac{dV}{dq} = 0 \tag{5.18}$$

La soluzione, ossia la posizione di equilibrio q_O, se esiste, viene, in genere, ricavata con opportuni metodi numerici quali quello di bisezione, delle secanti o di Newton-Raphson.

Se esiste la posizione di equilibrio statico sono, quindi, possibili due approcci:

- linearizzare nell'intorno di tale posizione la (5.17);
- ricondurre, tramite linearizzazione nell'intorno di q_O, l'energia cinetica T e la funzione dissipativa D a forme quadratiche nella variabile $\dot{q}$ e l'energia potenziale V a un'analoga forma quadratica in q.

Si consideri dapprima l'energia cinetica T. La (5.8) può essere sviluppata in serie di Taylor nell'intorno della posizione di equilibrio statico $q=q_O$ troncando l'espansione ai termini quadratici:

$$\begin{aligned} T(q,\dot{q}) = T(q_0,0) &+ \left.\frac{\partial T}{\partial q}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} (q-q_0) + \left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} \dot{q} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 T}{\partial q^2}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} (q-q_0)^2 + \\ &+ \left.\frac{\partial^2 T}{\partial q \partial \dot{q}}\right|_{q=q_0,\dot{q}=0} (q-q_0)\dot{q} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} \dot{q}^2 + \ldots \end{aligned} \tag{5.19}$$

Si deve fin da subito notare che:

$$
(5.20) \qquad \begin{aligned}
&\left.\frac{\partial T}{\partial q}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} = \frac{1}{2}\frac{da(q)}{dq}\dot{q}^2\Big|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} = 0 \\
&\left.\frac{\partial^2 T}{\partial q^2}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} = \frac{1}{2}\frac{d^2 a(q)}{dq^2}\dot{q}^2\Big|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} = 0
\end{aligned}
$$

e analogamente

$$
(5.21) \qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a(q)\dot{q}\Big|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} = 0 \\
&\frac{\partial^2 T}{\partial q \partial \dot{q}} = \frac{da(q)}{dq}\dot{q}\Big|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} = 0
\end{aligned}
$$

ovvero la (5.19) può essere riscritta come:

$$
(5.22) \qquad T(q,\dot{q}) \simeq T(q_0,0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} \dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q_0)\dot{q}^2
$$

Applicando la (5.22) alla equazione di Lagrange, otteniamo:

$$
(5.23) \qquad \begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) \simeq a(q_0)\ddot{q} \\
&\frac{\partial T}{\partial q} \simeq 0
\end{aligned}
$$

e quindi, tenendo conto delle (5.23):

$$
(5.24) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} \cong a(q_0)\ddot{q} = m_0\ddot{q}
$$

In modo del tutto analogo si può ricondurre a una forma quadratica anche l'energia potenziale V, sviluppandola secondo Taylor nell'intorno della posizione di equilibrio statico:

(5.25) $$V(q)=V(q_0)+\left(\frac{dV(q)}{dq}\right)\Bigg|_{q=q_0}(q-q_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2V(q)}{dq^2}\right)\Bigg|_{q=q_0}(q-q_0)^2+...$$

ricordando la (5.18) e avendo definito, con la variabile $\overline{q}$, lo spostamento subito dalla variabile indipendente rispetto alla posizione di equilibrio statico

(5.26) $$V(q)=V(q_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2V(q)}{dq^2}\right)\Bigg|_{q=q_0}\overline{q}^2+...$$

Con tale trasformazione di coordinate, la variabile $\overline{q}$ definisce dunque il solo moto perturbato del sistema nell'intorno della posizione di equilibrio statico $q=q_O$. L'applicazione delle equazioni di Lagrange alla funzione *V(q)*, resa quadratica nella variabile indipendente $\overline{q}$, porta alla:

(5.27) $$\frac{dV(q)}{dq}\simeq\left(\frac{dV(q_0)}{dq}\right)+\left(\frac{d^2V(q)}{dq^2}\right)\Bigg|_{q=q_0}\overline{q}=k_0\overline{q}$$

in cui il primo termine è nullo sia perché $V(q_0)$ è una costante, sia dalla definizione di posizione di equilibrio secondo la (5.18).

Analogamente a quanto fatto per l'energia cinetica, anche la funzione dissipativa *D* (5.12) può essere resa quadratica, sviluppandola in serie di Taylor arrestata al termine quadratico:

(5.28) $$\begin{aligned}D(q,\dot{q})&=D(q_0,0)+\frac{\partial D}{\partial q}\Bigg|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}}(q-q_0)+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}\Bigg|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}}\dot{q}+\\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial q^2}\Bigg|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}}(q-q_0)^2+\frac{\partial^2 D}{\partial q\partial \dot{q}}\Bigg|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}}(q-q_0)\dot{q}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}^2}\Bigg|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}}\dot{q}^2+...\end{aligned}$$

Tenendo in considerazione dell'espressione della funzione dissipativa (analoga a quella dell'energia cinetica):

$$D(q,\dot{q})\simeq D(q_0,0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}^2}\Bigg|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}}\dot{q}^2$$

$$
\left.\frac{\partial D}{\partial q}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} = \frac{1}{2}\frac{dr(q)}{dq}\dot{q}^2\Big|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} = 0
$$

$$
\left.\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} = r(q)\dot{q}\Big|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} = 0 \tag{5.29}
$$

$$
\left.\frac{\partial^2 D}{\partial q^2}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} = \frac{1}{2}\frac{d^2 r(q)}{dq^2}\dot{q}^2\Big|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} = 0
$$

$$
\left.\frac{\partial^2 D}{\partial q \partial \dot{q}}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} = \frac{dr(q)}{dq}\dot{q}\Big|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} = 0
$$

e quindi

$$
D(q,\dot{q}) \simeq D(q_0,0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}^2}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} \dot{q}^2 \tag{5.30}
$$

che porta alla espressione:

$$
\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \cong \left.\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}^2}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} \dot{q} = r_0 \dot{q} \tag{5.31}
$$

Da ultimo si consideri il lavoro virtuale $\delta^* L$ delle rimanenti forze attive esterne che, come detto, supponiamo funzioni solo del tempo *t*. Lo spostamento virtuale dei punti di applicazione delle forze può essere espresso come:

$$
\delta^* \vec{y}_f = \left(\frac{d\vec{y}_f}{dq}\right)\delta^* q \simeq \left(\frac{d\vec{y}_f}{dq}\right)\Bigg|_{q=q_0} \delta^* q \tag{5.32}
$$

e quindi la componente lagrangiana delle sollecitazioni attive Q diviene funzione del solo tempo:

$$
Q(t) = \frac{\delta^* L}{\delta^* q} = \sum_{f=1}^{n_f} \vec{F}_f \times \left(\frac{d\vec{y}_f}{dq}\right)\Bigg|_{q=q_0} \tag{5.33}
$$

Conseguentemente, l'equazione di moto risulta un'equazione differenziale del secondo ordine lineare e a coefficienti costanti completa del tipo:

$$m_0\ddot{\overline{q}} + r_0\dot{\overline{q}} + k_0\overline{q} = Q(t) \tag{5.34}$$

in cui si considera come variabile indipendente la coordinata $\overline{q}$ del moto perturbato definito a partire dalla posizione di equilibrio q_O e *Q(t)* rappresenta la componente lagrangiana delle sollecitazioni attive.

All'espressione (5.34) si perviene ricordando che:

$$\begin{aligned} \overline{q} &= (q - q_0) \\ \dot{\overline{q}} &= \frac{d}{dt}(q - q_0) = \dot{q} \\ \ddot{\overline{q}} &= \frac{d^2}{dt^2}(q - q_0) = \ddot{q} \end{aligned} \tag{5.35}$$

Nel caso in cui si abbiano forze che non dipendenti dal tempo ma più in generale dallo stato (sistemi quindi immersi in campi di forze generici), F_f risulta essere funzione non lineare di $q, \dot{q}$ e quindi si avrà

$$Q(q,\dot{q}) = Q(q_0,0) + \left.\frac{dQ}{dq}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} (q - q_0) + \left.\frac{dQ}{d\dot{q}}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} \dot{q} + \ldots \tag{5.36}$$

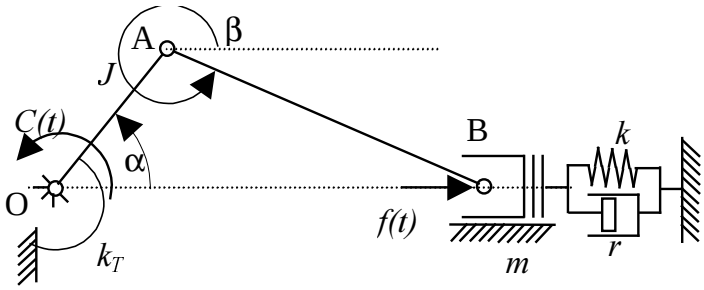
Conseguentemente l'equazione di moto risulta:

$$m_0\ddot{\overline{q}} + \left(r_0 - \left.\frac{dQ}{d\dot{q}}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} \right)\dot{\overline{q}} + \left(k_0 - \left.\frac{dQ}{dq}\right|_{\substack{q=q_0\\ \dot{q}=0}} \right)\overline{q} = Q(q_0,0)$$

5.3 Un esempio: il manovellismo ordinario

Consideriamo il sistema a un grado di libertà di figura formato da una biella e una manovella. Indichiamo con *m* la massa dello stantuffo e con *J* il momento di inerzia della manovella rispetto all'asse di rotazione (supponiamo di aver ridotto al bottone di manovella e al piede di biella la massa della biella stessa e di averne quindi conglobato gli effetti nei termini *m* dello stantuffo e *J* della manovella: in tale ipotesi la biella risulta quindi priva di massa[1]).

[1] Vedi capitolo 4, note 1 e 2



Lo stantuffo è collegato a terra tramite una molla di rigidezza *k* e uno smorzatore viscoso di costante *r*: tali termini possono rappresentare, in modo semplificato, gli effetti smorzanti e elastici equivalenti linearizzati del fluido contenuto nel cilindro.

Si ipotizza, inoltre, che sullo stantuffo agisca una forza funzione del tempo *f(t)* (che permette, a esempio, di rappresentare la parte delle forze trasmesse dal fluido funzione esplicita del solo tempo), mentre la manovella, richiamata da una molla di costante torsionale k_T, è soggetta a una coppia funzione del tempo *C(t)*.

Come coordinate fisiche si sono scelte lo spostamento orizzontale dello stantuffo *y*, misurato a partire dal punto morto superiore, e la rotazione della manovella α rispetto alla posizione orizzontale. Come coordinata libera *q* (ovvero coordinata indipendente) viene scelta la rotazione della manovella: i legami tra le coordinate fisiche y e α e la coordinata libera $q=\alpha$ sono quelli ottenuti nel precedente capitolo:

(5.37) $$\begin{cases} y = a\cos\alpha + b\cos\beta \\ a\sin\alpha + b\sin\beta = 0 \end{cases}$$

da cui:

(5.38) $$y = a\cos\alpha + b\sqrt{1-\left(-\frac{a\sin\alpha}{b}\right)^2}$$

Poiché la lunghezza della biella *b* è normalmente molto maggiore di quella *a* della manovella, il termine

(5.39) $$\left(-\frac{a\sin\alpha}{b}\right)^2 = g \ll 1$$

ed è quindi lecito applicare l'approssimazione in serie binomiale:

(5.40)
$$\sqrt{1-\left(-\frac{a\sin\alpha}{b}\right)^2}=(1-g)^{\frac{1}{2}}\simeq 1-\frac{1}{2}g+\cdots=1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}\sin^2\alpha$$

Inserendo tale approssimazione nell'espressione (5.38) si ottiene:

(5.41) $$y\simeq a\left(\cos\alpha+\frac{b}{a}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\sin^2\alpha\right)\right)$$

che risulta tanto più precisa quanto minore è il rapporto

(5.42) $$\frac{a}{b}=\lambda$$

detto anche *rapporto caratteristico del manovellismo.*

Vengono definite così due leggi di moto del pistone in funzione del livello di approssimazione possibile: la legge di prima approssimazione (valida per rapporti (a/b) piccoli, caratteristici ad esempio di un motore a combustione per veicoli commerciali dove a/b = 0.2 – 0.3) risulta

(5.43) $$y\cong\left(a\cos\alpha+b\right)$$

mentre la legge di seconda approssimazione viene definita come:

(5.44) $$y\cong\left(a\cos\alpha+b-\frac{a}{2}\frac{a}{b}\sin\alpha^2\right)$$

necessaria qualora il rapporto a/b raggiunga valori pari a 0.6-0.7 caratteristici ad esempio di manovellismi per motori da competizione.

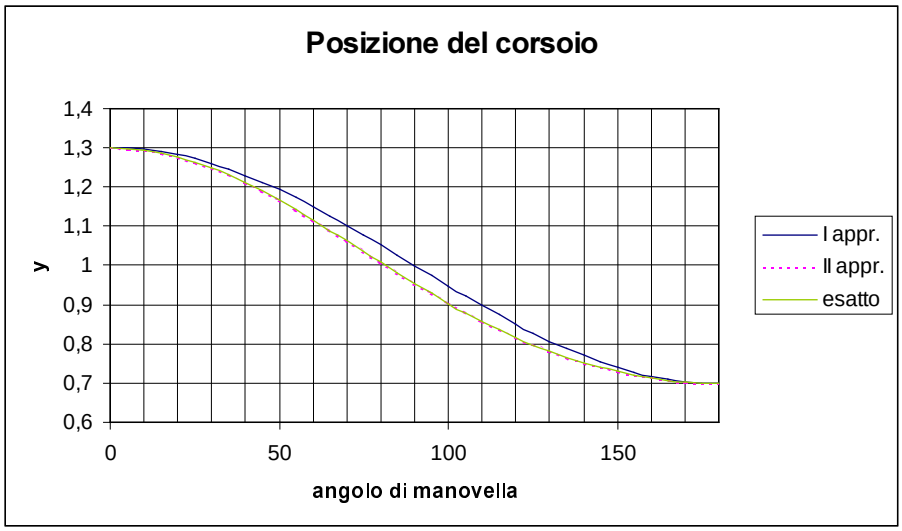


Figura 1- Confronto tra le varie approssimazioni per il calcolo della posizione del corsoio per $\lambda = 0,3$ **e** $a = 0,3$

Supponiamo che sia possibile applicare la legge di prima approssimazione per cui risulta:

$$\begin{aligned} \alpha &= q \\ y &= a\cos\alpha + b \end{aligned} \tag{5.45}$$

Scriviamo dapprima le varie forme di energia e il lavoro virtuale in funzione delle coordinate fisiche y e α, supponendo che le molle siano scariche nella posizione di equilibrio statico definito dalle $\alpha = \alpha_S$ e $y = y_S$:

$$\begin{aligned} \alpha_s &= q_s \\ y_s &= a\cos\alpha_s + b \end{aligned} \tag{5.46}$$

ottenendo così:

$$
\begin{aligned}
&T = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} J\dot{\alpha}^2 \\
&V = \frac{1}{2} k_T \left(\alpha - \alpha_s\right)^2 + \frac{1}{2} k \left(y - y_s\right)^2 \\
&D = \frac{1}{2} r\dot{y}^2 \\
&\delta^* L = -f(t)\delta^* y + c(t)\delta^* \vartheta
\end{aligned}
\tag{5.47}
$$

Introducendo ora le relazione cinematiche trovate nelle espressioni delle varie forme di energia, è possibile esprimere le stesse in funzione della unica variabile indipendente *q*. L'energia cinetica, dato il legame non lineare tra *y* e *q* , non risulta una forma quadratica:

$$
T = \frac{1}{2}\left(J + ma^2 \sin^2 q\right)\dot{q}^2 = \frac{1}{2} a\left(q\right)\dot{q}^2 \tag{5.48}
$$

per la presenza del termine $a\left(q\right) = \left(J + ma^2 \sin^2 q\right)$, in cui sono raccolti i coefficienti moltiplicativi di $\dot{q}$, funzioni a loro volta della stessa variabile indipendente *q*. Applicando le equazioni di Lagrange si ottiene pertanto:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \left(J + ma^2 \sin^2 q\right)\dot{q} = a\left(q\right)\dot{q} \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = a\left(q\right)\ddot{q} + \frac{\partial a\left(q\right)}{\partial q}\dot{q}^2 = \left(J + ma^2 \sin^2 q\right)\ddot{q} + 2ma^2 \cos q \sin q\dot{q}^2 \\
&\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{1}{2}\frac{\partial a\left(q\right)}{\partial q}\dot{q}^2 = ma^2 \cos q \sin q\dot{q}^2
\end{aligned}
\tag{5.49}
$$

I termini dovuti all'energia cinetica che compaiono nell'equazione del moto del sistema analizzato sono quindi:

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = \left(J + ma^2 \sin^2 q\right)\ddot{q} + ma^2 \cos q \sin q\dot{q}^2 \tag{5.50}
$$

in cui si nota la presenza di termini non lineari in q e $\dot{q}$

Analogamente a quanto fatto per l'energia cinetica, effettuiamo la sostituzione delle (5.45) e (5.46) nell'espressione dell'energia potenziale *V*:

$$
V = V(q) = \frac{1}{2} k_T \left(q - q_s\right)^2 + \frac{1}{2} k \left[\left(b + a\cos q\right) - \left(b + a\cos q_s\right)\right]^2 \tag{5.51}
$$

La derivata secondo Lagrange non fornisce un termine lineare poiché V non è una forma quadratica in q:

(5.52) $$\frac{dV}{dq} = k_T\left(q - q_s\right) + ka^2 \sin q \cos q_s - ka^2 \sin q \cos q$$

La funzione dissipativa D risente anch'essa del legame non lineare tra y e $q=\alpha$:

(5.53) $$D = \frac{1}{2} r\dot{y}^2 = \frac{1}{2} ra^2 \sin^2 q\dot{q}^2$$

e dunque la derivata secondo Lagrange dà origine a un coefficiente moltiplicativo di $\dot{q}$, funzione della coordinata libera q:

(5.54) $$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = ra^2 \sin^2 q\dot{q}$$

Da ultimo consideriamo il lavoro virtuale $\delta^* L$ delle forze attive, ossia della forza *f(t)* agente sullo stantuffo e della coppia *c(t)* agente sulla manovella:

(5.55)
$$\delta^* L = f(t)\delta^* y + c(t)\delta^* \vartheta = f(t)\frac{dy}{dq}\delta^* q + c(t)\delta^* q = \left[-f(t)a\sin q + c(t)\right]\delta^* q = Q(t,q)\delta^* q$$

Anche qui la presenza del legame non lineare tra y e q dà origine a un termine non lineare nell'espressione del lavoro. L'equazione di moto del sistema vibrante non lineare analizzato diventa pertanto del tipo:

(5.56) $$\begin{aligned}\left(J + ma^2 \sin^2 q\right)\ddot{q} + ma^2 \cos q \sin q\dot{q}^2 + ra^2 \sin^2 q\dot{q} + k_T\left(q - q_s\right) \\ + ka^2 \sin q \cos q_s - ka^2 \cos q \sin q = -f(t)a\sin q + c(t)\end{aligned}$$

Come è possibile osservare, l'equazione (5.56) è non lineare e non ne è possibile una soluzione in forma chiusa. E' possibile solo integrarla, adottando procedimenti di integrazione numerica passo-passo.

Si consideri ora un'applicazione in cui il manovellismo in esame ammetta una posizione di equilibrio e si vogliano studiare le piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio statico dovuta all'effetto delle sole forze conservative, posizione che può essere determinata risolvendo l'equazione:

(5.57) $$\frac{dV}{dq} = k_T\left(q - q_s\right) + ka^2 \sin q \cos q_s - ka^2 \sin q \cos q = 0$$

con metodi numerici quale, a esempio, il metodo di Newton Raphson. Nel caso particolare analizzato è facile ricavare la posizione di equilibrio statico definita dalla relazione:

(5.58) $$q_0 = q_s$$

Ottenuta, mediante un qualsivoglia metodo, la soluzione q_0 (che può anche non essere unica), si procede alla linearizzazione, applicando quanto visto nel paragrafo precedente, ossia cercando di rendere quadratiche le varie forme di energia. Per quanto riguarda l'energia cinetica si ha:

(5.59) $$T = \frac{1}{2}\left(J + ma^2 \sin^2 q\right)\dot{q}^2 \cong \frac{1}{2}\left(J + ma^2 \sin^2 q_s\right)\dot{q}^2$$

da cui, applicando Lagrange si ha:

(5.60) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) = \left(J + ma^2 \sin^2 q_s\right)\ddot{q}$$

Per rendere quadratica l'energia potenziale V del sistema, è necessario sviluppare la stessa in serie, arrestandosi alla derivata seconda:

(5.61) $$V = V_0 + \left(\frac{dV}{dq}\right)\Bigg|_{q=q_s}\left(q - q_s\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dq^2}\right)\Bigg|_{q=q_s}\left(q - q_s\right)^2 + \ldots$$

ricordando la (5.57) e che

(5.62) $$\left(\frac{d^2V}{dq^2}\right)\Bigg|_{q=q_s} = k_T + ka^2 \cos^2 q_s - ka^2 \cos 2q_s$$

da cui, derivando con Lagrange la (5.61), si ottiene:

(5.63) $$\frac{dV}{dq} \simeq \left(\frac{d^2V}{dq^2}\right)\Bigg|_{q=q_s}\left(q - q_s\right) = \left(k_T + ka^2 \cos^2 q_s - ka^2 \cos 2q_s\right)\left(q - q_s\right)$$

Linearizzando in modo analogo la funzione dissipativa si ottiene la forma quadratica:

(5.64) $$D = \frac{1}{2}\left(ra^2 \sin^2 q_s\right)\dot{q}^2$$

che, derivata secondo Lagrange, porta al termine dissipativo lineare:

(5.65) $$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \left(ra^2 \sin^2 q_s\right)\dot{q}$$

Considerando, infine, il lavoro virtuale $\delta^* L$, sviluppato fino al solo termine costante, la componente lagrangiana *Q(t)* delle sollecitazioni attive diviene:

(5.66) $$Q(t) = \frac{\delta^* L}{\delta^* q} = -f(t)a \sin q_s + c(t)$$

L'equazione del moto linearizzata risulta quindi essere la seguente:

(5.67)
$$\left(J + ma^2 \sin^2 q_s\right)\ddot{q} + \left(ra^2 \sin^2 q_s\right)\dot{q} + \left(k_T + ka^2 \cos^2 q_s - ka^2 \cos 2q_s\right)\left(q - q_s\right) = -f(t)a \sin q_s + c(t)$$

Definendo con la variabile $\overline{q}$ il moto perturbato nell'intorno della posizione $q_O = q_S$, ovvero

(5.68) $$q = \left(\overline{q} + q_s\right)$$

la (5.67) diventa:

(5.69)
$$\left(J + ma^2 \sin^2 q_s\right)\ddot{\overline{q}} + \left(ra^2 \sin^2 q_s\right)\dot{\overline{q}} + \left(k_T + ka^2 \cos^2 q_s - ka^2 \cos 2q_s\right)\overline{q} = -f(t)a \sin q_s + c(t)$$

ossia un'equazione differenziale lineare completa del secondo ordine a coefficienti costanti in $\overline{q}$.