

CAPITOLO 4

Dinamica dei sistemi di corpi rigidi

4.1 Sistema composto da corpi rigidi

I risultati ottenuti nel capitolo 1 per un singolo corpo rigido, possono essere estesi al caso di un sistema di corpi rigidi ricordando dalla Meccanica Razionale che: *Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema di corpi rigidi sia in equilibrio è che sia in equilibrio ciascuna sua parte considerata rigida.* Ovviamente, per applicare questo criterio alla condizione dinamica, occorrerà sostituire al concetto di equilibrio quello di equilibrio dinamico, ossia inserire nelle equazioni anche i termini di forze e coppie di inerzia agenti sui vari corpi componenti il sistema.

Da questo criterio discende che per un sistema composto da n corpi rigidi potranno scriversi n sistemi di equazioni vettoriali del tipo (1.10):

$$(4.1) \quad \begin{cases} \vec{F}_j + \vec{F}_{i,j} = 0 \\ \vec{M}_{O,j} + \vec{C}_{i,j} + (G_j - O) \wedge \vec{F}_{i,j} = 0 \end{cases}$$

che, opportunamente proiettate, daranno luogo per un sistema piano a $3n$ equazioni scalari indipendenti. Nel sistema di equazioni il vettore risultante delle forze agenti sul generico j -esimo corpo F_j comprenderà:

- le forze esterne agenti sul solo corpo j ;
- le reazioni vincolari corrispondenti ai vincoli che collegano il corpo j a terra;
- le componenti di reazione vincolare corrispondenti ai vincoli che collegano il corpo j agli altri corpi del sistema.

Queste equazioni possono consentire di ricavare $3n$ incognite che saranno in larga parte costituite dalle reazioni vincolari, e che inoltre comprenderanno:

- un numero di parametri cinematici incogniti (componenti di accelerazione periferica o angolare dei corpi) pari al numero di gradi di libertà del sistema, nel caso in cui si voglia risolvere un problema di Dinamica diretta;
- un numero di componenti di forza o coppia incognite pari al numero di gradi di libertà del sistema, nel caso in cui si voglia risolvere un problema di Dinamica inversa.

Naturalmente, in base a quanto affermato sopra, una coppia di equazioni di equilibrio dinamico aventi la forma (4.1) può essere scritta per qualsiasi parte del sistema, non necessariamente formata dal singolo j -esimo corpo rigido, ma ad esempio da più corpi uniti fra loro da vincoli. In questo caso, le tre equazioni scalari di equilibrio dinamico che si possono scrivere conterranno:

- le forze esterne agenti su tutti i corpi facenti parte di quella porzione del sistema per cui si scrive la condizione di equilibrio dinamico;
- le reazioni vincolari corrispondenti a vincoli che collegano a terra la parte di sistema considerata;
- le componenti di azioni interne corrispondenti ai vincoli che collegano la porzione considerata al resto del sistema; non compariranno però le forze scambiate tra due corpi appartenenti alla parte di sistema considerata in quanto forze interne. Ricordando difatti il principio di azione e reazione, a ciascuna forza se ne accompagnerà una uguale e contraria, con uguale retta di applicazione, di modo che il contributo di queste due forze sarà complessivamente nullo, sia per quanto riguarda il vettore risultante \vec{F} che per il momento rispetto al polo O considerato M_o .

In ogni caso, è facile verificare che qualunque nuova equazione si scriva in aggiunta al sistema (4.1) sarà combinazione lineare delle equazioni già contenute in quel sistema. In altre parole, l'equilibrio (statico o dinamico) di un sistema di n corpi consente di scrivere esattamente $3n$ equazioni scalari linearmente indipendenti. Fermo restando questo numero massimo di equazioni, di volta in volta potrà essere più opportuno e semplice per il tipo di sistema considerato scegliere di imporre l'equilibrio parziale di un solo corpo, di una parte di sistema formata da più corpi o addirittura dell'intero sistema, tenendo conto delle avvertenze sopra riportate su quali forze includere in tali equazioni.

4.2 Le forze esterne

Nei sistemi meccanici possiamo riconoscere tre classi di forze legate alla geometria, ovvero:

- forze dipendenti dagli spostamenti del sistema;
- forze dipendenti dalle velocità del sistema;
- forze dipendenti dalle accelerazioni del sistema, dette *forze d'inerzia* e già descritte in precedenza.

4.2.1 Forze dipendenti dagli spostamenti del sistema

Possono essere prodotte o da una deformazione di un elemento del sistema (come nel caso dell'elongazione di una molla o della torsione di un albero) oppure per effetto del movimento in un campo di forze.

Sperimentalmente si può verificare che la forza f necessaria a deformare una molla a elica cilindrica può essere considerata proporzionale allo spostamento relativo ξ degli estremi della stessa.

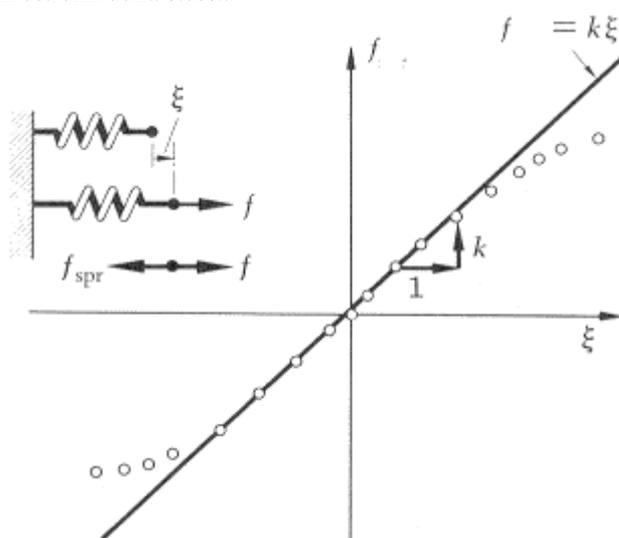


Figura 1 Curva caratteristica di una molla

In Figura 1, i cerchi bianchi rappresentano i valori sperimentali. Anche se il legame forza-elongazione è non lineare, se ne utilizza praticamente un'approssimazione lineare. Essa è ottenuta nel modo seguente:

- indichiamo con $f(\xi)$ la forza agente su un estremo della molla in condizioni di equilibrio statico per un'elongazione ξ ;
- incrementando la forza di una quantità Δf , la molla si allungherà di una quantità $\Delta \xi$. La nuova forza agente $f(\xi) + \Delta f$ può anche essere calcolata usando l'espansione in serie di Taylor attorno alla posizione di equilibrio statico ovvero

$$f(\xi^*) + \Delta f = f(\xi^* + \Delta \xi) = f(\xi^*) + \left. \frac{df}{d\xi} \right|_{\xi^*} (\Delta \xi) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right|_{\xi^*} (\Delta \xi)^2 + \dots$$

Per piccoli valori di elongazione, le derivate di ordine superiore al primo possono essere trascurate, per cui

$$f(\xi^*) + \Delta f \approx f(\xi^*) + \left. \frac{df}{d\xi} \right|_{\xi^*} (\Delta \xi)$$

ovvero

$$\Delta f \approx \left. \frac{df}{d\xi} \right|_{\xi^*} (\Delta \xi) = k \Delta \xi$$

ove la rigidità k della molla è pari a:

$$k = \left. \frac{df}{d\xi} \right|_{\xi^*}$$

e rappresenta il coefficiente angolare della tangente locale alla curva sperimentale che lega le forze f alle elongazioni ξ , ovvero la forza applicata che, in condizioni statiche, induce un'elongazione unitaria nella molla.

In molti casi il valore approssimato della rigidità k di elementi elastici può essere stimato utilizzando le formule fornite dalla Scienza delle Costruzioni. A esempio la rigidità torsionale di un albero può essere calcolata ricordando che in condizioni di equilibrio statico, ovvero trascurando l'inerzia dell'albero stesso supposto omogeneo, l'angolo di rotazione ψ_{stat} di una sezione generica di coordinata z rispetto alla sezione $z = 0$ è proporzionale a z stesso e vale

$$\frac{\psi_{stat}}{z} = q \frac{M_t}{GJ_p}$$

ove

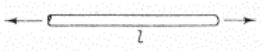
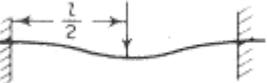
- G è il modulo di elasticità tangenziale del materiale di cui è composto l'albero;
- J_p è il momento polare d'inerzia della sezione;
- M_t è il momento torcente equivalente alla distribuzione degli sforzi sulla sezione normale;
- q è il fattore di torsione.

Nel caso particolare di *torsione circolare* in cui le sezioni si mantengono piane, q è uguale a 1. Ne deriva che il momento torcente M_t che induce una rotazione $\psi_{t,t}$

unitaria in una sezione di estremità rispetto all'altra in un albero omogeneo a sezione circolare lungo l , ovvero la rigidezza torsionale dell'albero stesso, è pari a:

$$k = \frac{GJ_p}{l}$$

Con analoghi approcci, sempre utilizzando quanto imparato nel corso di Scienza delle Costruzioni, è possibile valutare, sempre nelle ipotesi di Saint Venant, la rigidezza in alcuni punti significativi di travi omogenee variamente vincolate agli estremi:

	condizioni di carico e di vincolo	rigidezza equivalente lungo la direzione del carico nel punto di applicazione dello stesso
	trave sollecitata a carico assiale (libera-libera)	$k = \frac{EA}{l}$
	trave sollecitata a flessione (appoggio-appoggio)	$k = \frac{3EJ}{a^2b^2}$
	trave sollecitata a flessione (incastro-libera)	$k = \frac{3EJ}{l^3}$
	trave sollecitata a flessione (incastro-appoggio)	$k = \frac{768EJ}{7l^3}$
	trave sollecitata a flessione (incastro-incastro)	$k = \frac{192EJ}{l^3}$

ove

A è l'area della sezione trasversale;

E è il modulo di elasticità normale del materiale (o Young) di cui è composto l'albero;

J momento d'inerzia della sezione trasversale;

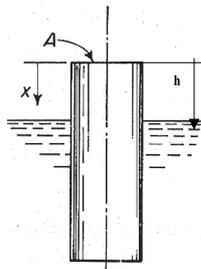
l lunghezza di libera inflessione della trave ($l = a + b$).

Per quanto riguarda il caso di campi di forze, supponiamo di studiare cosa succede a un galleggiante cilindrico, opportunamente zavorrato in modo da muoversi solo in direzione verticale. Trascurando ogni moto del liquido che possa interferire

col sistema, il cilindro si dispone, in condizioni statiche, con la sua faccia superiore a una quota h dal pelo libero in modo che il suo peso sia equilibrato dalla spinta di Archimede. Se il cilindro è spostato verticalmente di una quantità x , la forza di galleggiamento varia di una quantità pari a

$$\Delta f = \rho g Ax = kx$$

dove ρ è la densità del liquido, g l'accelerazione di gravità e A l'area di base del cilindro, opposta allo spostamento e tendente a riportare il cilindro nella posizione di equilibrio statico.



4.2.2 Forze dipendenti dalle velocità del sistema

Qualora il contatto avvenga tra un corpo e un fluido, se il moto di quest'ultimo può ritenersi laminare a causa della sua alta viscosità e conseguente basso valore del *numero di Reynolds* (<1100), la forza d'attrito che nasce, detta di *smorzamento viscoso*, può ritenersi proporzionale alla velocità relativa, mentre se il *numero di Reynolds* è maggiore di 3500 la forza di attrito è proporzionale al quadrato della velocità relativa tra corpo e fluido.

Nella figura 2 sono rappresentati gli andamenti sperimentali tipici per i tre casi di forze dipendenti dalla velocità sopra citati e le loro approssimazioni

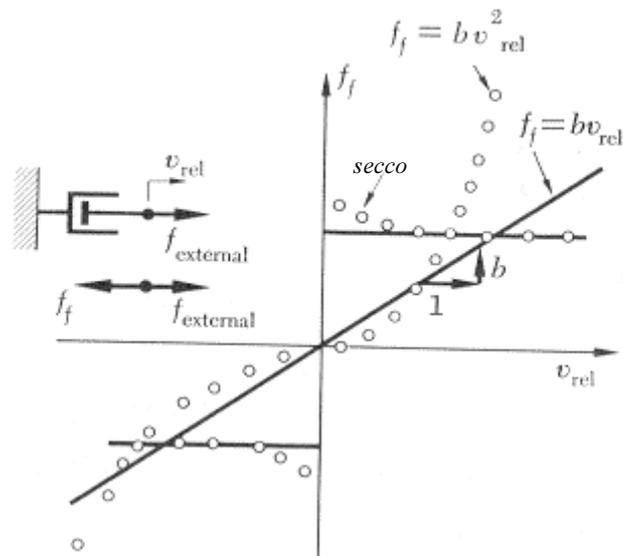


Figura 2 Andamento sperimentale (\circ) e approssimato dell'andamento delle forze d'attrito secco, viscoso e con legge quadratica in funzione della velocità relativa

4.3 Il manovellismo ordinario centrato

Si tratta di un meccanismo a catena chiusa, utilizzato per convertire il moto rotatorio in moto traslatorio rettilineo (e viceversa). E' uno dei meccanismi più utilizzati, e trova impiego, ad esempio, nei motori a combustione interna (figura di riferimento) nelle presse, nelle pompe e compressori alternativi.

4.3.1 Analisi cinematica (definizione della geometria)

Un motore monocilindrico a 4 tempi è costituito da un albero motore che porta una manovella di lunghezza a , un corsoio o pistone che si impegna nel cilindro, ed una biella di lunghezza b che collega l'estremità della manovella al corsoio.

Lo schema cinematico, mostrato in figura 3 comprende la manovella OA , in grado di compiere una rotazione completa, e la biella AB , alla cui estremità B è collegato il corsoio. Si assuma che AB sia maggiore di OA , affinché l'elemento OA possa effettivamente compiere un giro completo.

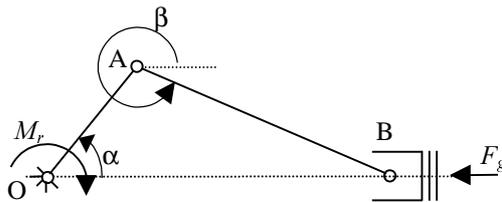


Figura 3 Il manovellismo ordinario centrato

Utilizziamo la notazione complessa per descrivere la configurazione geometrica ovvero una condizione cinematica che realizzi la configurazione geometrica (o più condizioni, nel caso di sistemi più complessi) può sempre essere rappresentata in termini di una equazione (o più equazioni) scritta con il formalismo dei numeri complessi, che prende il nome di *equazione di chiusura* in quanto può essere interpretata graficamente come una condizione che impone la circostanza per cui un particolare poligono si mantenga chiuso durante il moto del sistema.

La relazione tra le coordinate dei corpi che compongono la catena può (attraverso il metodo dei numeri complessi) essere esplicitata in funzione di un numero minimo di coordinate, pari al numero di gradi di libertà del sistema: nell'esempio considerato si potrà ad esempio esplicitare la rotazione di AB in funzione della rotazione di OA e rappresentare quindi il moto del sistema in funzione di un'unica coordinata libera, come conseguenza del fatto che il meccanismo considerato ha un solo grado di libertà.

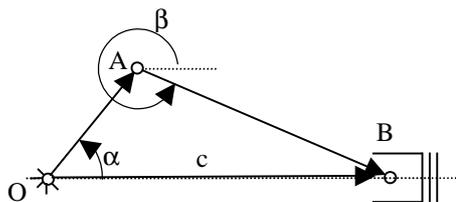


Figura 4 L'equazione di chiusura per l'analisi cinematica

Il sistema di numeri complessi (vettori) che individua la posizione del piede di biella B è:

$$(4.2) \quad (A-O) + (B-A) = (B-O)$$

che in forma complessa diventa:

$$(4.3) \quad ae^{i\alpha} + be^{i\beta} = c$$

in cui c è un numero reale, essendo OB sempre appartenente all'asse x .

Derivando rispetto al tempo la (4.3) si ottiene il legame tra la velocità del corsoio \dot{c} e quella degli altri membri del cinematismo:

$$(4.4) \quad i\dot{\alpha}ae^{i\alpha} + i\dot{\beta}be^{i\beta} = \dot{c}$$

La successiva derivazione rispetto al tempo porge l'espressione dell'accelerazione del punto B :

$$(4.5) \quad i\ddot{\alpha}ae^{i\alpha} - \dot{\alpha}^2ae^{i\alpha} + i\ddot{\beta}be^{i\beta} - \dot{\beta}^2be^{i\beta} = \ddot{c}$$

La precedente equazione di chiusura (4.2) può essere riscritta nelle sue componenti:

$$(4.6) \quad \begin{cases} a \cos \alpha + b \cos \beta = c \\ a \sin \alpha + b \sin \beta = 0 \end{cases}$$

in cui la seconda equazione costituisce la condizione di vincolo del punto B , ossia l'appartenenza all'asse x . Le equazioni sopra descritte costituiscono un sistema di equazioni non lineari, gli angoli α e β compaiono infatti come argomenti di funzioni trigonometriche. In questo primo esempio la posizione del corsoio B e l'inclinazione della biella in funzione della posizione angolare della manovella divengono:

$$(4.7) \quad \begin{cases} c = a \cos \alpha + b \sqrt{1 - \left(\frac{a \sin \alpha}{b}\right)^2} \\ \beta = \arcsin\left(-\frac{a \sin \alpha}{b}\right) \end{cases}$$

Per ottenere velocità ed accelerazione del punto B possiamo derivare il sistema di equazioni (4.6), che corrisponde a scrivere le equazioni per la parte reale e per la parte immaginaria rispettivamente della (4.4) per la velocità, e della (4.5) per l'accelerazione:

$$(4.8) \quad \begin{cases} -\dot{\alpha}a \sin \alpha - \dot{\beta}b \sin \beta = \dot{c} \\ \dot{\alpha}a \cos \alpha + \dot{\beta}b \cos \beta = 0 \end{cases}$$

che ammette la soluzione:

$$(4.9) \quad \begin{cases} \dot{c} = -a\dot{\alpha}(\sin \alpha - \cos \alpha \tan \beta) \\ \dot{\beta} = -\dot{\alpha} \left(\frac{a \cos \alpha}{b \cos \beta} \right) \end{cases}$$

La successiva derivazione porta a definire le accelerazioni:

$$\begin{cases} -\ddot{\alpha}a \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 a \cos \alpha - \ddot{\beta}b \sin \beta - \dot{\beta}^2 b \cos \beta = \ddot{c} \\ \ddot{\alpha}a \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 a \sin \alpha + \ddot{\beta}b \cos \beta - \dot{\beta}^2 b \sin \beta = 0 \end{cases}$$

All'interno della camera di dimensioni variabili formata dal cilindro, dal cielo del pistone e da quello della camera di combustione, si ha un andamento variabile della pressione p , determinato dall'alternarsi delle quattro fasi di funzionamento del motore: *aspirazione* ($0 \leq \alpha \leq \pi$), *compressione* ($\pi \leq \alpha \leq 2\pi$), *espansione* ($2\pi \leq \alpha \leq 3/2\pi$) e *scarico* dei gas combusti ($3/2\pi \leq \alpha \leq 4\pi$).

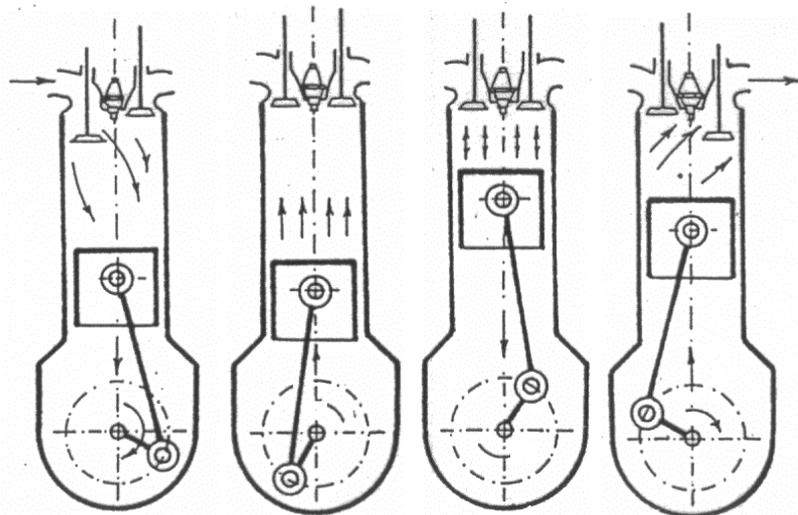


Figura 5- La sequenza delle quattro fasi del ciclo termodinamico a partire dalla fase di aspirazione (a sinistra)

L'andamento della pressione p_g all'interno della camera di dimensioni variabili è normalmente rappresentato sotto forma di un diagramma avente per ascisse il volume geometrico effettivo v della camera

$$v_{eff} = v_2 + (a + b - c) * \frac{\pi D^2}{4}$$

ove D è il diametro del cilindro, detto anche *alesaggio*, e v_2 è il volume della camera quando il corsoio, o *pistone*, si trova al massimo della sua corsa, posizione detta anche *punto morto superiore*..

La pressione p_g risulta così funzione implicita della rotazione della manovella α secondo il ciclo ideale di figura 6 nell'ipotesi di compressione ed espansione adiabatica.

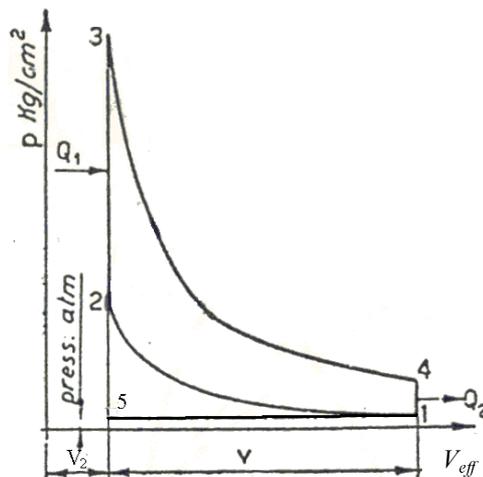


Figura 6 Ciclo ideale termodinamico per unità di volume d'aria aspirata

Con riferimento alla figura 6, la fase 5-1 rappresenta l'aspirazione, la 1-2 la compressione adiabatica, la 2-3 lo scoppio, che si suppone avvenga a volume costante colla produzione del calore Q_1 , ove

$$Q_1 = c_v (T_3 - T_2) \text{ con } c_v = \text{calore specifico a volume costante della miscela}$$

la fase 3-4 è quella di espansione adiabatica durante la quale viene prodotto lavoro meccanico, ed infine la 4-1 e la 1-5 costituiscono la fase di scarico dei gas combusti, con la cessione nella parte iniziale 4-1 del calore Q_2 a una sorgente più fredda, come richiede il II principio della termodinamica.

Sul cielo del pistone agisce pertanto la forza F_g , che rappresenta la risultante delle pressioni agenti sullo stantuffo, pari a:

$$F_g(\alpha) = \pi \frac{D^2}{4} (p_g(\alpha) - p_{atm}) = \pi \frac{D^2}{4} p_g^*(\alpha)$$

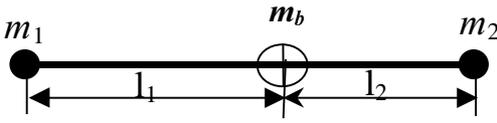
dove p_g^* è la pressione relativa, in quanto non dobbiamo dimenticare che la faccia interna del cielo del corsoio è sottoposta all'azione della pressione atmosferica.

Nell'esempio corrente si supponrà poi che sull'albero motore (ossia sulla manovella) agisca un momento di valore incognito opposto alla velocità angolare dell'albero. Tale momento potrebbe rappresentare l'effetto di un utilizzatore che applichi alla macchina un momento resistente non noto.

Per quanto riguarda le inerzie del sistema, si supponrà che sull'albero motore sia calettato un volano con momento di inerzia J_m , e che nel corsoio sia concentrata una massa m_p . Le inerzie della biella possono essere considerate in via approssimata attraverso due masse poste agli estremi della biella stessa: una massa posta nella estremità, detta *testa di biella*, in cui la biella si connette alla manovella si muove solidalmente con la manovella, per cui può essere aggiunta al momento di inerzia J_m di questa. La massa posta alla estremità opposta, detta *piede di biella*, si muove insieme al pistone, e può quindi essere sommata al termine m_B del pistone propriamente detto.

Si ricorda che la riduzione delle inerzie della biella per mezzo di due masse consente di riprodurre la massa complessiva della biella e la posizione del baricentro di questa, mentre introduce una approssimazione per quanto riguarda il momento di inerzia della biella¹.

¹ Con riferimento alla figura sottostante le due masse, indicate con m_1 e m_2 , sono, infatti, calcolate risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ l_1 & -l_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_b \\ 0 \end{Bmatrix}$$


Si faccia inoltre l'ipotesi che la manovella, come avviene nella realtà grazie all'opportuno contrappeso, abbia il baricentro della sua massa totale, dovuta alla massa propria più quella in moto con A dovuta alla biella, coincidente con O, e quindi il risultante delle forze d'inerzia agenti su di essa sia nullo.

Come noto il sistema presenta un solo grado di libertà. Facendo corrispondere una reazione vincolare a ciascun g.d.v. ed una azione attiva libera al g.d.l. residuo: nelle equazioni di equilibrio verranno pertanto evidenziate 8 reazioni vincolari e il momento incognito M_r .

Le azioni e reazioni suddette sono poste in evidenza nello schema di figura:

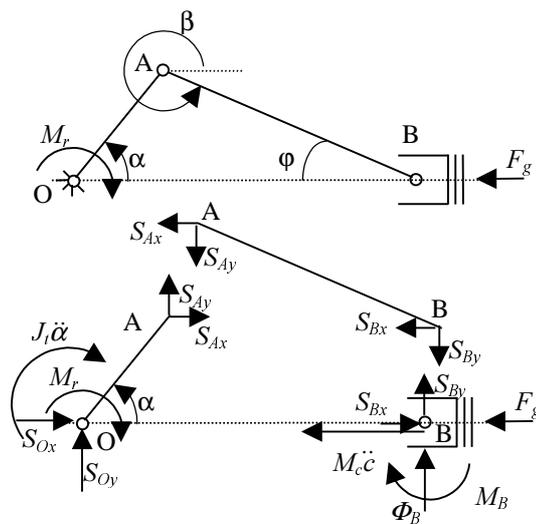


Fig. 7 Le forze agenti sul sistema

Il sistema è quindi costituito da tre corpi rigidi ed è pertanto possibile scrivere le equazioni di equilibrio per i tre corpi rigidi².

che appunto esprimono le condizioni sopra enunciate.

² Indicate con m_1 e m_2 , le masse equipollenti della biella, risulta:

$$M_c = m_p + m_2$$

$$J_t = J_m + m_1 a^2$$

La scelta di quale insieme di corpi rigidi prendere in considerazione nella scrittura delle equazioni di equilibrio dipende dalle grandezze da determinare. Se ad esempio si dovessero calcolare tutte le reazioni vincolari indicate in figura si potranno scrivere, considerando un solo corpo alla volta, tre equazioni di equilibrio rispettivamente per corsoio, biella e manovella, ottenendo il sistema di equazioni riportato di seguito.

Corsoio:

$$\begin{cases} \sum F_x^* = 0 \\ \sum F_y^* = 0 \\ \sum M_{(B)}^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_g + m_c \ddot{c} - S_{Bx} = 0 \\ \Phi_B + S_{By} = 0 \\ M_B = 0 \end{cases}$$

Biella:

$$\begin{cases} \sum F_x^* = 0 \\ \sum F_y^* = 0 \\ \sum M_{(B)}^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{Bx} + S_{Ax} = 0 \\ S_{Ay} + S_{By} = 0 \\ S_{Ax} l \sin \varphi + S_{Ay} l \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

Manovella:

$$\begin{cases} \sum F_x^* = 0 \\ \sum F_y^* = 0 \\ \sum M_{(O)}^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{Ox} + S_{Ax} = 0 \\ S_{Oy} + S_{By} = 0 \\ -M_r - J_l \ddot{\alpha} - a S_{Ax} \sin \alpha + a S_{Ay} \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Il sistema costituito dalle 9 equazioni scalari si presenta determinato nelle 9 incognite: S_{Ox} , S_{Oy} , S_{Ax} , S_{Ay} , S_{Bx} , S_{By} , M_B , Φ_B e naturalmente M_r .

Nella scrittura adottata l'asterisco indica che la somma è estesa a comprendere anche il sistema delle forze d'inerzia del corpo considerato.

Dal sistema d'equazioni si ottengono ad esempio i risultati:

$$\begin{cases} S_{Ax} = -S_{Bx} = -(F_g + m_c \ddot{c}) \\ S_{Ay} = (F_g + m_c \ddot{c}) \tan \varphi \\ M_r = -J_l \ddot{\alpha} + (F_g + m_c \ddot{c}) a (\sin \alpha + \cos \alpha \tan \varphi) = 0 \end{cases}$$