CAPITOLO 12

DINAMICA DI SISTEMI VIBRANTI A PIU' GRADI DI LIBERTA'

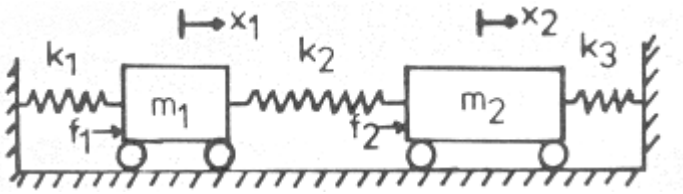
12.1 Sistemi a più gradi di libertà non smorzati

Per un sistema non smorzato con *N* gradi di libertà, le equazioni che ne governano il moto possono essere sempre scritte nella forma matriciale

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}$$

dove

- $[M]$ e $[K]$ sono rispettivamente le matrici quadrate di massa e di rigidezza di ordine *N;*
- $\{x(t)\}$ e $\{f(t)\}$ sono i vettori di ordine *N* degli spostamenti e delle forze agenti, entrambi funzione del tempo.



Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, ovvero calcolando le forze che agiscono sul sistema prima per $x_1 \neq 0, x_2 = 0$ e poi quelle per $x_1 = 0, x_2 \neq 0$, si possono facilmente determinare le equazioni di equilibrio dinamico delle due masse, ovvero

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = f_1$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_3x_2 + k_2(x_2 - x_1) = f_2$$

che può essere riscritta come

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{f\}$$

con

- $[M]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$
- $[K]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$
- $\{x(t)\}=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$ e $\{f(t)\}=\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$

Consideriamo, dapprima la soluzione del moto libero che sarà del tipo

$$\{x(t)\}=\{X\}e^{\lambda t}$$

dove $\{X\}$ è un vettore di ordine *N* di ampiezze indipendenti dal tempo.

Imponendo la soluzione all'equazione differenziale otteniamo

$$\left([K]+\lambda^2[M]\right)\{X\}e^{\lambda t}=\{0\}$$

la cui unica soluzione non banale è data da

$$\det\left|[k]+\lambda^2[M]\right|=\det\left\|\begin{bmatrix} k_1+k_2+\lambda^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3+\lambda^2 m_2 \end{bmatrix}\right\|=0$$

che è il polinomio di grado *2N* in λ

$$m_1m_2\lambda^4+\left(m_1(k_2+k_3)+m_2\left(k_1+k_2\right)\right)\lambda^2+k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3=0$$

da cui

$$a\lambda^4+b\lambda^2+c=0$$

le cui radici sono

$$\lambda_1^2=\frac{-b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}<0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\pm i\omega_1$$

$$\lambda_2^2=\frac{-b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}<0\Rightarrow\lambda_{3,4}=\pm i\omega_2$$

Sostituendo le radici nell'equazione di partenza, avremo

$$\left([K]-\omega_1^2[M]\right)\{X\}_1=\{0\}$$

e

$$\left([K]-\omega_2^2[M]\right)\{X\}_2=\{0\}$$

che ci permettono di calcolare a meno di una costante arbitraria, dipendente dalle condizioni iniziali, le deformate modali $\{X\}_i$, o modi, del sistema associate a ogni frequenza propria ω_i.

Nel nostro caso

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2-\omega_1^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3-\omega_1^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_1X_1 \\ {}_1X_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Risolvendo la prima equazione

$$\left(k_1+k_2-\omega_1^2 m_1\right){}_1X_1 - k_2\,{}_1X_2 = 0$$

ovvero

$$\{X\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{k_1+k_2-\omega_1^2 m_1}{k_2} \end{Bmatrix}_1 X_1$$

e analogamente

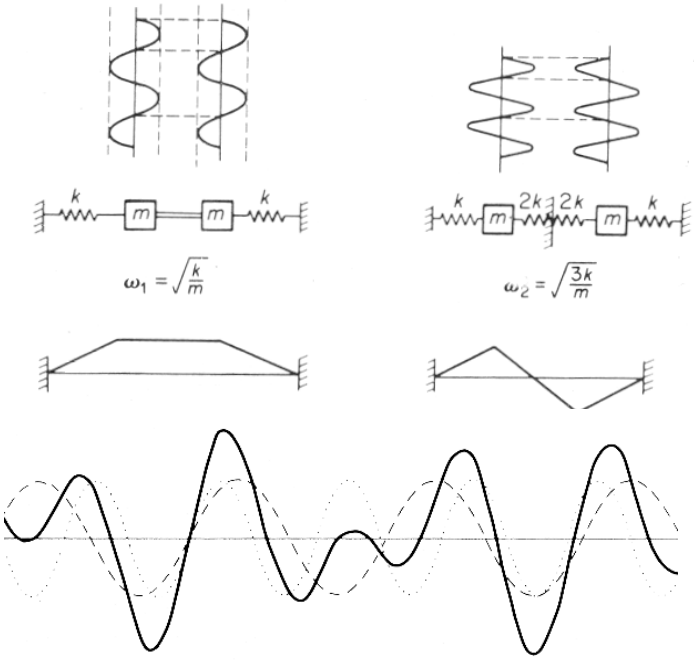
$$\{X\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{k_1+k_2-\omega_2^2 m_1}{k_2} \end{Bmatrix}_2 X_1$$

Nel caso, a esempio, che $m_1=m_2=m$ e $k_1=k_2=k_3=k$, abbiamo che

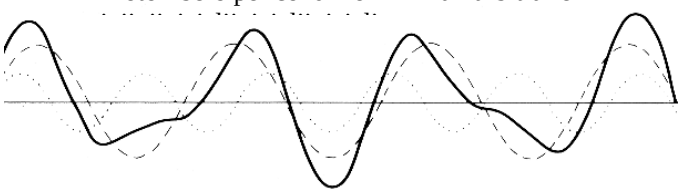
$$\omega_1^2=\frac{k}{m} \text{ e } \omega_2^2=\frac{3k}{m}$$

e corrispondentemente

$$\{X\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}_1 X_1 \text{ e } \{X\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}_2 X_1$$



Moto libero per condizioni iniziali arbitrarie



Ritornando all'equazione di partenza

$$\left([K]+\lambda^2[M]\right)\{X\}e^{\lambda t}=\{0\}$$

potremmo premoltiplicarla per l'inversa della matrice di massa ottenendo

$$\left([M]^{-1}[K]+\lambda^2[I]\right)\{X\}e^{\lambda t}=\{0\}$$

forma del tutto analoga a

$$\left([A]-\gamma[I]\right)\{V\}=\{0\}$$

dove γ sono gli autovalori della matrice *[A]* e $\{V\}$ i corrispondenti autovettori.
E' ovvio che

$-\gamma \equiv \lambda^2$ e $\{V\} \equiv \{X\}$

Nel nostro caso si ha

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix}$$

$$[A] = [M]^{-1}[K] \begin{bmatrix} 2k/m & -k/m \\ -k/m & 2k/m \end{bmatrix}$$

i cui autovalori e autovettori sono

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} 3k/m \\ k/m \end{Bmatrix}$$

e

$$[V] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo ora dimostrare l'ortogonalità dei modi di vibrare. Infatti, abbiamo che

$$\left([K] - \omega_1^2 [M]\right)\{X\}_1 = \{0\}$$

e

$$\left([K] - \omega_2^2 [M]\right)\{X\}_2 = \{0\}$$

Premoltiplicando la prima espressione per $\{X\}_2$ abbiamo

$$\{X\}_2^T \left([K] - \omega_1^2 [M]\right)\{X\}_1 = \{0\} \Rightarrow \{X\}_2^T [K]\{X\}_1 = \omega_1^2 \{X\}_2^T [M]\{X\}_1$$

Trasponendo la seconda espressione e postmoltiplicandola per $\{X\}_1$ otteniamo invece

$$\{X\}_2^T \left([K]^T - \omega_2^2 [M]^T\right)\{X\}_1 = \{0\} \Rightarrow \{X\}_2^T [K]^T \{X\}_1 = \{X\}_2^T \omega_2^2 [M]^T \{X\}_1$$

Ma le matrici $[M]$ e $[K]$ sono simmetriche per cui

$$\omega_2^2 \{X\}_2^T [M]\{X\}_1 = \omega_1^2 \{X\}_2^T [M]\{X\}_1 \Rightarrow \left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)\{X\}_2^T [M]\{X\}_1 = 0$$

ovvero se $(\omega_2 - \omega_1) \neq 0$, cioè le frequenze proprie sono distinte, abbiamo che

$$\{X\}_2^T [M]\{X\}_1 = \{X\}_2^T [K]\{X\}_1 = 0$$

ovvero i modi propri vibrare, associati a frequenze proprie distinte, sono ortogonali rispetto alla matrice di massa e rigidezza.

Inoltre

$$\{X\}_i^T [M]\{X\}_i = m_{ii} \text{ e } \{X\}_i^T [K]\{X\}_i = k_{ii}$$

dove m_{ii} e k_{ii} sono chiamate rispettivamente massa e rigidezza generalizzata.

Nel nostro esempio

$$m_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2m; m_{22} = 2m; k_{11} = 2k; k_{22} = 6k$$

12.2 Approccio modale

Cerchiamo ora un sistema di coordinate libere che disaccoppi contemporaneamente il sistema tanto inerzialmente, quanto elasticamente, ovvero tale per cui le equazioni che, risolte, descrivano il moto del sistema siano disaccoppiate.

Se costruiamo una matrice quadrata ψ le cui colonne siano costituite dai modi propri di vibrare, ovvero

$$[\psi] = \begin{bmatrix} {}_1X_1 & {}_2X_1 \\ {}_1X_2 & {}_2X_2 \end{bmatrix}$$

detta anche matrice modale e definiamo la trasformazione

$\{x(t)\} = [\psi]\{q(t)\}$ con $\{q(t)\}$ detto vettore delle coordinate principali

$$[M][\psi]\{\ddot{q}\} + [K][\psi]\{q\} = \{f\}$$

ovvero

$$[\psi]^T [M][\psi]\{\ddot{q}\} + [\psi]^T [K][\psi]\{q\} = [\psi]^T \{f\}$$

Da quanto sopra detto, si vede che

$$[\psi]^T [M][\psi] = diag[m] \text{ e } [\psi]^T [K][\psi] = diag[k]$$

dove $diag[m]$ e $diag[k]$ sono matrici diagonali, tali per cui i elementi $m_{ij} = 0$ e $k_{ij} = 0$ se $j \neq i$

Nel nostro caso con le due masse uguali tra loro, così come le tre rigidezze, si ha

$$diag[m] = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \text{ e } diag[k] = \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 + f_2 \\ f_1 - f_2 \end{Bmatrix}$$

Ma

$$[\psi]^T \left([K] - \omega^2 [M] \right) [\psi] = \{0\} \Rightarrow diag[k] - \omega^2 diag[m] = \{0\}$$

Poiché esiste l'inversa di $diag[m]$ potremmo premoltiplicare l'equazione per l'inversa di $diag[m]$ ovvero

$$\left(diag[m]\right)^{-1}\left(diag[k]-\omega^2 diag[m]\right)=\{0\}\Rightarrow\left(diag[m]\right)^{-1}diag[k]-\omega^2[I]=\{0\}$$

dove

$$\left(diag[m]\right)^{-1}diag[k]=\begin{bmatrix} k/m & 0 \\ 0 & 3k/m \end{bmatrix}=diag\left[\bar{\omega}^2\right]$$

Al medesimo risultato, saremmo pervenuti se avessimo normalizzato i modi di vibrare, dividendone tutte le componenti per la costante $1/\sqrt{2m}$.

Analizziamo, ora, la risposta forzata.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{f\}e^{i\omega t}$$

che a regime ammetterà una soluzione del tipo

$$\{x(t)\}=\{x\}e^{i\omega t}$$

dove il vettore delle ampiezze di vibrazione $\{x\}$ è soluzione di

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{x\}=\{f\}\Rightarrow\{x\}=\left([K]-\omega^2[M]\right)^{-1}\{f\}$$

che può essere anche riscritta come

$$\{x\}=H(\omega)\{f\}$$

dove $H(\omega)$ è la *receptance matrix* del sistema, quadrata di ordine *N*, e ne costituisce il modello della sua risposta in frequenza.

Ritornando alla definizione

$$H(\omega)=\left([K]-\omega^2[M]\right)^{-1}\Rightarrow\left([K]-\omega^2[M]\right)=\left(H(\omega)\right)^{-1}$$

ma

$$[\psi]^T\left([K]-\omega^2[M]\right)[\psi]=\left(diag\left[\bar{\omega}^2\right]-\omega^2[I]\right)=[\psi]^T\left(H(\omega)\right)^{-1}[\psi]$$

e quindi

$$H(\omega)=[\psi]\left(diag\left[\bar{\omega}^2\right]-\omega^2[I]\right)^{-1}[\psi]^T$$

da cui si evince che la *receptance matrix* è simmetrica

$$h_{jk}(\omega)=\frac{x_j(\omega)}{f_k(\omega)}=h_{kj}(\omega)=\frac{x_k(\omega)}{f_j(\omega)}=\sum_{r=1}^{N}\frac{{}_rX_j\cdot{}_rX_k}{\bar{\omega}_r^2-\omega^2}$$

da cui si nota come il sistema possa andare in risonanza, qualora la pulsazione della forzante ω uguagli una delle *N* frequenze ω_r proprie del sistema vibrante.

Ritornando al nostro sistema vibrante, risulta che risolvendo il sistema di equazioni lineari

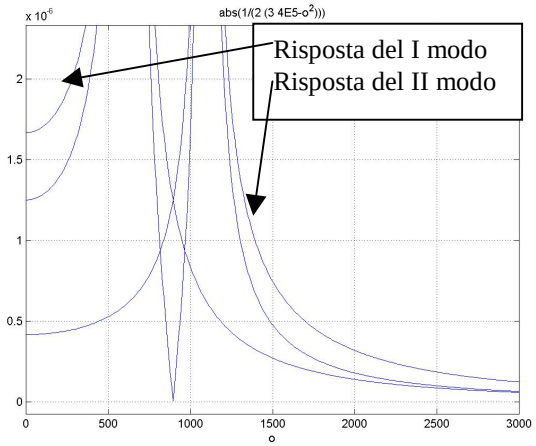
$$h_{11}(\omega) = -\frac{-2k + \omega^2 m}{3k^2 - 4km\omega^2 + \omega^4 m^2} = \frac{2k - \omega^2 m}{m^2(k/m - \omega^2)(3k/m - \omega^2)}$$

$$h_{21}(\omega) = \frac{k}{3k^2 - 4km\omega^2 + \omega^4 m^2} = \frac{k}{m^2(k/m - \omega^2)(3k/m - \omega^2)}$$

mentre in termini modali

$$h_{11}(\omega) = \frac{1}{2m(k/m - \omega^2)} + \frac{1}{2m(3k/m - \omega^2)} = \frac{2k - m\omega^2}{m^2(k/m - \omega^2)(3k/m - \omega^2)}$$

$$h_{21}(\omega) = \frac{1}{2m(k/m - \omega^2)} - \frac{1}{2m(3k/m - \omega^2)} = \frac{k}{m^2(k/m - \omega^2)(3k/m - \omega^2)}$$



Come si vede dal grafico a fianco, ove è mostrato l'andamento del modulo di h_{11}, non si commette un grande errore se studiamo la risposta del sistema nell'intorno della prima frequenza propria considerando la risposta di un sistema che abbia massa modale pari a m_{11} e rigidezza pari a k_{11}. Analogo discorso si può fare considerando la sola risposta dovuta alla seconda frequenza propria se la pulsazione della forzante è di valore non dissimile da questa.

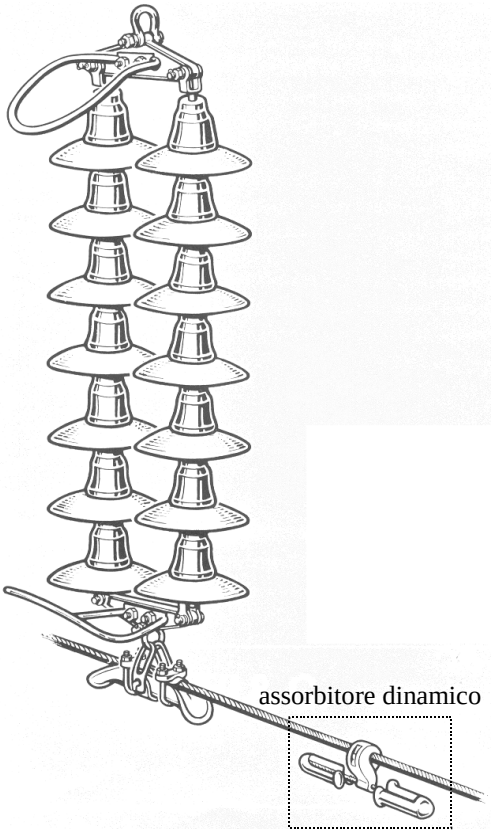
Ovvero abbiamo, empiricamente, dimostrato che pur essendo i sistemi fisici continui, poiché le loro frequenze proprie sono ragionevolmente separate nel dominio delle frequenze, è lecito, nell'ipotesi che lo spettro della forzante sia limitato nello

stesso dominio, considerare il contributo di un numero limitato di modi le cui frequenze proprie associate stanno nel dominio dello spettro della forzante.

Ovvero: è possibile studiare la risposta dinamica a regime di un sistema continuo con un modello matematico con un numero discreto di gradi di libertà.

Ne consegue, inoltre, che misurando sperimentalmente la *receptance matrix*, dalla risposta misurata nell'intorno di una risonanza possiamo ricavare i parametri modali (massa modale o massa generalizzata m_{ii} e rigidezza modale o rigidezza generalizzata k_{ii}) così come il modo di vibrare.

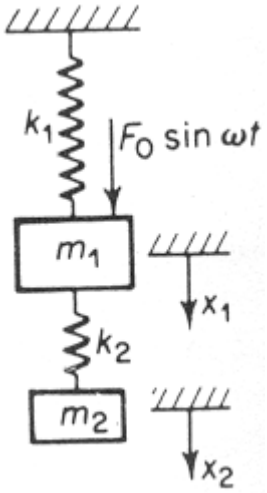
12.3 Assorbitore dinamico



Il concetto su cui si basa l'assorbitore dinamico è quello di dissipare tutta l'energia introdotta da un campo di forze in un sistema vibrante mandandone volutamente in risonanza un particolare e preservando il resto.

Nella figura è rappresentata la sospensione di una linea elettrica ad alta tensione. Ovvi problemi impediscono dal collegare il cavo a terra, a esempio con un elemento dissipativo. D'altronde il basso smorzamento del cavo e l'ampio spettro del vento incidente, oltre al fenomeno delle vibrazioni indotte per distacco di vortici, rendono molto probabile l'eccitazione in risonanza della campata.

Consideriamo il comportamento del cavo con l'assorbitore dinamico, considerando quest'ultimo, per semplicità, a un solo grado di libertà anziché a quattro, ovvero ci si riconduca allo schema seguente dove m_1 e k_1 sono rispettivamente la massa e la rigidezza a flessione del cavo, mentre m_2 e k_2 sono quelle di uno dei due contrappesi. Essendo il sistema lineare, o a questo approssimato, la forzante armonica è una delle componenti dello sviluppo in serie di Fourier dell'azione del vento.



Le equazioni di moto sono le soluzioni a regime del sistema

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2\left(x_1 - x_2\right) = F_0 \sin \omega t$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2\left(x_2 - x_1\right) = 0$$

Effettuiamo le seguenti sostituzioni

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}},\ \omega_{22} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \text{ e } X_0 = \frac{F_0}{k_1}$$

e imponiamo come soluzioni degli integrali particolari $x_1(t) = X_1 \sin \omega t$ e $x_2(t) = X_2 \sin \omega t$, otterremo

$$\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right] X_1 - \frac{k_2}{k_1} X_2 = X_0$$

$$-X_1 + \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right] X_2 = 0$$

ovvero

$$\frac{X_1}{X_0} = \frac{1 - (\omega / \omega_{22})^2}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right]\left[1 - (\frac{\omega}{\omega_{22}})^2\right] - \frac{k_2}{k_1}}$$

$$\frac{X_2}{X_0} = \frac{1}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right]\left[1 - (\frac{\omega}{\omega_{22}})^2\right] - \frac{k_2}{k_1}}$$

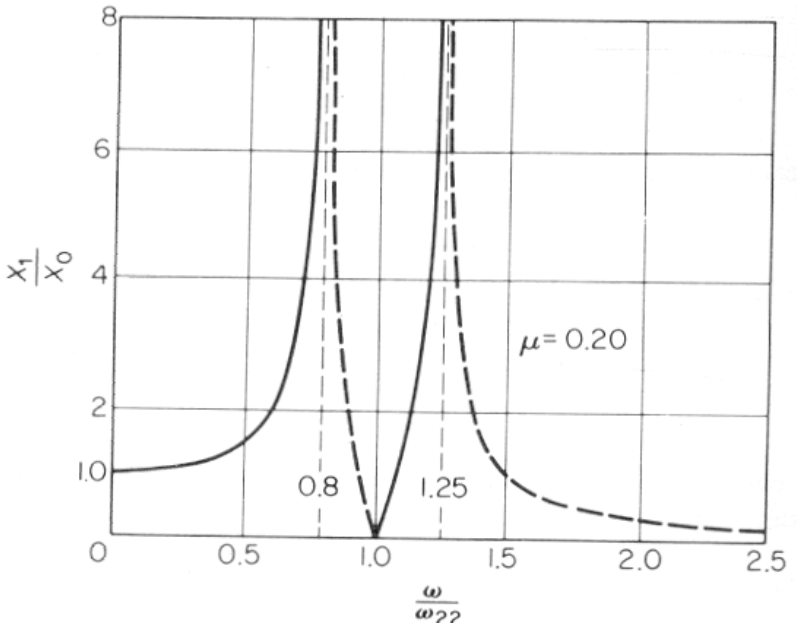
Si nota immediatamente che per $\omega = \omega_{22}$, pari alla frequenza propria del solo assorbitore, $\frac{X_1}{X_0}$ tende a zero mentre $\frac{X_2}{X_0}$ vale $-\frac{k_1}{k_2}$ ovvero

$$k_2 X_2 = F_0 = \omega^2 m_2 X_2$$

che ci permette, noto F_0 e ω^2, di determinare l'entità della massa m_2 imposta la massima freccia ammissibile per il trefolo che regge la massa stessa.

Le due frequenze proprie del sistema dipendono, ovviamente dal rapporto

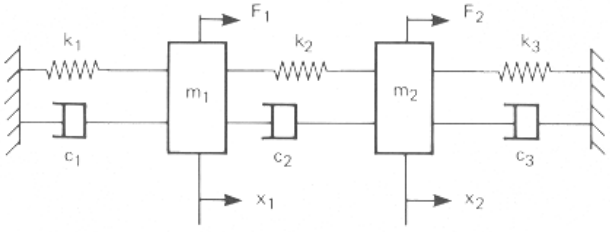
$$\mu = \frac{m_{22}}{m_{11}}$$



12.4 Vibrazioni forzate smorzate - smorzamento proporzionale

Come sappiamo esistono diversi tipi di smorzamento quali il viscoso, l'isteretico, quello dovuto ad attrito coulombiano, quello aerodinamico, ecc.

E' in generale difficile valutare quale tipo di smorzamento agisca in una particolare struttura e spesso il fenomeno dissipativo è dovuto alla presenza contemporanea di più di tipi di smorzamento. In molti casi, tuttavia, lo smorzamento è piccolo e possono essere fatte alcune ipotesi semplificative.



Il sistema di equazioni di equilibrio dinamico per il sistema vibrante di figura è ovviamente dato da

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

ovvero

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F\}$$

Diremo che lo smorzamento è proporzionale se

- $[C]=\alpha[M]$;
- oppure $[C]=\beta[K]$;
- ovvero $[C]=\alpha[M]+\beta[K]$.

In tutti e tre i casi, si dimostra facilmente che la matrice modale $[\psi]$ del sistema conservativo associato, ovvero quello senza smorzamento, che diagonalizza tanto la matrice di massa $[M]$, quanto quella di rigidezza $[K]$, rende diagonale anche la matrice $[C]$.

Infatti nel caso più generale

$$[\psi]^T[C][\psi]=[\psi]^T\left[\alpha[M]+\beta[K]\right][\psi]=\alpha\cdot diag[m]+\beta\cdot diag[k]=diag[c]$$

e quindi, passando in coordinate principali

$$diag[m]\{\ddot{q}\}+diag[c]\{\dot{q}\}+diag[k]\{q\}=[\psi]^T\{F\}$$

che rappresenta un set di *N* equazioni disaccoppiate, tante quante sono i gradì di libertà del sistema, del tipo

$$m_{ii}\ddot{q}_i+c_{ii}\dot{q}_i+k_{ii}q_i=\{X\}_i^T\{F\}$$

dove $\{X\}_i$ è l'i-simo autovetture del sistema conservativo associato.

L'equazione, che risolta fornisce la legge del moto di un sistema a un grado di libertà forzato, mette in luce che, a meno di una costante arbitraria, la forzante è data dal lavoro che le restanti forze agenti sul sistema compiono per l'i-simo modo di vibrare.

La frequenza proprie del sistema sono date da

$$\omega_{Di}=\bar{\omega}_i\sqrt{1-\xi_i^2};\bar{\omega}_i^2=\frac{k_{ii}}{m_{ii}};\xi_i=\frac{c_{ii}}{2m_{ii}\bar{\omega}_i}=\frac{\alpha}{2\bar{\omega}_i}+\frac{\beta\bar{\omega}_i}{2}$$

mentre il decay avviene con le ampiezze che decrescono esponenzialmente con legge del tipo

$$e^{-\xi_i\bar{\omega}_i t}$$

e il generico termine della matrice di trasferimento vale

$$h_{ij}(\omega)=\sum_{r=1}^{N}\frac{{}_rX_i\cdot{}_rX_j}{\left(k_{rr}-m_{rr}\omega^2\right)+i(\omega c_{rr})}$$

12.4.1 Smorzamento isteretico

Nel caso di smorzamento isteretico o strutturale abbiamo già visto che l'energia dissipata in un ciclo è indipendente dalla pulsazione ma dipende solo dalla ampiezza di vibrazione ovvero

$$[M]\{\ddot{x}\} + i\eta[K]\{x\} + [K]\{x\} = \{F\}$$

Passando in coordinate principali

$$diag[m]\{\ddot{q}\} + (1+i\eta)\,diag[k]\{q\} = [\psi]^T\{F\}$$

ovvero un set di *N* equazioni disaccoppiate, tante quante sono i gradì di libertà del sistema, del tipo

$$m_{ii}\ddot{q}_i + (1+i\eta)k_{ii}q_i = \{X\}_i^T\{F\}$$

dove $\{X\}_i$ è l'i-simo autovetture del sistema conservativo associato.

Ovviamente

$$\lambda_i^2 = -\frac{k_{ii}}{m_{ii}}(1+i\eta) = -\bar{\omega}_i^2\sqrt{1+\eta^2}\,e^{i\tan^{-1}(\eta)}$$

mentre il generico termine della matrice di trasferimento vale

$$h_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^{N}\frac{{}_rX_i \cdot {}_rX_j}{\left(k_{rr} - m_{rr}\omega^2\right) + i(\eta k_{rr})}$$

12.4.2 Smorzamento non proporzionale

Quando lo smorzamento non è proporzionale alla matrice di massa e o a quella di rigidezza, la matrice modale del sistema conservativo associato non diagonalizza la matrice di smorzamento.

Si può, tuttavia, ottenere un sistema disaccoppiato in questo modo. Il set di *N* equazioni differenziali del II ordine sono convertite in un set *2N* equazioni differenziali del primo ordine, assegnando nuove variabili (chiamate variabili di stato) a ciascuna delle coordinate libere originali e delle loro derivate nel tempo

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$

Sostituendo

$$x_1 = z_1 \quad \dot{x}_1 = \dot{z}_1 = z_3 \quad \ddot{x}_1 = \dot{z}_3$$
$$x_2 = z_2 \quad \dot{x}_2 = \dot{z}_2 = z_4 \quad \ddot{x}_2 = \dot{z}_4$$

otteniamo

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} z_3 \\ z_4 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$

ovvero

$$[A]\{\dot{z}\} + [B]\{z\} = \{G\}$$

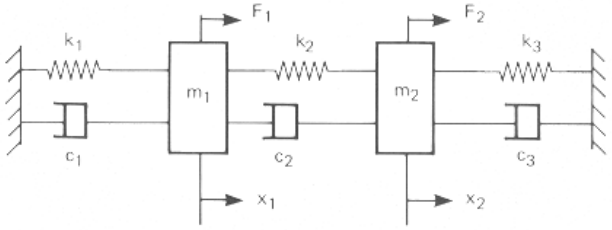
dove

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} = [A]^T \quad [B] = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} = [B]^T \quad \{G\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix}$$

che può essere risolta con il metodo degli autovalori con $\lambda_i = \omega_{Di}$

Supponiamo che

$$m_1 = m_2 = m \quad c_1 = c_2 = c_3 = c \quad k_1 = k_2 = k_3 = k$$



In questo caso particolare di smorzamento proporzionale otteniamo dal calcolo degli autovalori e autovettori

$$diag[\omega_D] = \begin{bmatrix} \frac{3c+\sqrt{9c^2-12mk}}{2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3c-\sqrt{9c^2-12mk}}{2m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m} \end{bmatrix}$$

$$[\psi] = \begin{bmatrix} -\frac{3c+\sqrt{9c^2-12mk}}{2m} & -\frac{3c-\sqrt{9c^2-12mk}}{2m} & \frac{c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m} & \frac{c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m} \\ \frac{3c+\sqrt{9c^2-12mk}}{2m} & \frac{3c-\sqrt{9c^2-12mk}}{2m} & \frac{c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m} & \frac{c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m} \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dove gli elementi delle prime due righe, come ci aspettavamo, soddisfano la condizione

$$x_1 = z_1 \quad \dot{x}_1 = \dot{z}_1 = z_3 = \omega_{Di} x_1$$
$$x_2 = z_2 \quad \dot{x}_2 = \dot{z}_2 = z_4 = \omega_{Di} x_2$$

e i modi propri del sistema sono quelli puramente reali del sistema conservativo.

Nel caso, invece, generale di smorzamento non proporzionale i modi propri smorzati esistono, ma non sono più identici a quelli del sistema conservativo e vi sono differenze di fase (non più *0* o π) tra le componenti delle coordinate libere.

I modi sono quindi complessi e non sono più definibili punti nodali (aventi componente nulla dello spostamento).