

CAPITOLO 11

SISTEMI VIBRANTI AD UN GRADO DI LIBERTA'

11.1 Effetti della deformabilità dinamica (meccanica delle vibrazioni)

Per le macchine viste finora, è quasi sempre possibile effettuare uno studio considerandole a un solo grado di libertà, dove ogni elemento è ritenuto rigido.

In realtà essi sono approssimati, pertanto i nostri schemi sono approssimati.

La deformabilità degli elementi componenti può essere voluta o indesiderata: a es. le sospensioni di un veicolo sono elementi volutamente deformabili. Purtroppo, per le difficoltà che insorgono nello studio e per gli effetti collaterali, sono ben più importanti i casi di deformabilità dinamica non voluta, quando un elemento che il progettista vorrebbe rigido si deforma, dando luogo di regola a moti vibratorii indesiderati e dannosi.

Per lo studio di questi moti vibratorii è necessario fare qualche considerazione sui modelli matematici atti a descrivere tali fenomeni. Spesso la difficoltà consiste nell'associare un modello deformabile a qualcosa che nella realtà il progettista vorrebbe rigido.

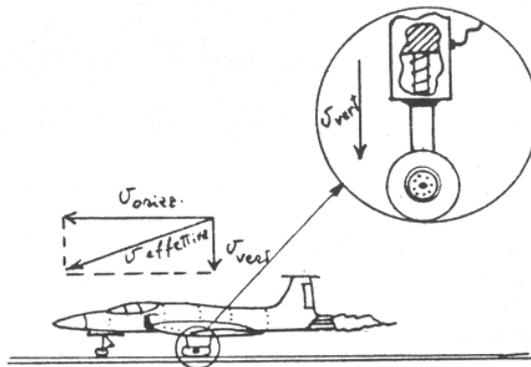
Ovviamente questi schemi devono essere i più semplici possibili ed è possibile suddividerli in due gruppi:

- modelli continui (a infiniti gradi di libertà) derivanti dalla Scienza delle Costruzioni, dove riferendoci, a esempio, a una trave, ogni punto di questa può muoversi e ogni sezione può ruotare. Per descriverne il comportamento è necessario conoscere una funzione $f(x)$ e delle equazioni alle derivate parziali. Tali modelli vengono usati per lo studio delle vibrazioni trasversali di travi o funi;
- modelli discreti (a n finiti gradi di libertà) che contrastano con l'osservazione del fenomeno fisico secondo la quale la deformabilità e l'inerzia sono distribuite nel sistema fisico.

Per fortuna, molte volte è possibile ricondurre il modello reale a sistemi a uno o pochi gradi di libertà.

Si tenga presente che per utilizzare modelli a uno o pochi gradi di libertà, è necessario prima effettuare lo studio con schemi a un numero maggiore di g.d.l. e

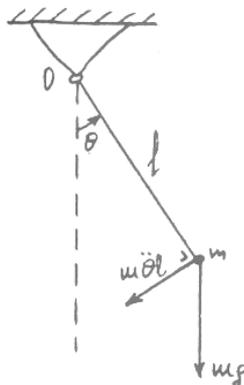
capire sotto quali condizioni si può tornare a pochi g.d.l. senza perdere informazioni importanti per la risoluzione del problema.



Un velivolo in atterraggio, a esempio, possiede una velocità che non è mai perfettamente orizzontale e per questo i carrelli sono dotati di opportuni molleggi che hanno il compito di dissipare l'energia associata alla componente verticale di tale velocità.

Se analizziamo in prima approssimazione l'impatto del velivolo sul campo d'atterraggio, trascurando, nel breve intervallo di tempo in cui avviene l'impatto, l'effetto dovuto alla componente orizzontale della velocità si nota che il comportamento dinamico del sistema, grazie alla grande rigidezza della fusoliera rispetto agli elementi elastici del treno d'atterraggio, può essere rappresentato dalla seguente equazione differenziale.

$$-m\ddot{y} - ky = 0$$



Altro esempio noto dalla Meccanica Razionale è quello del pendolo per il quale la scrittura dell'equazione di equilibrio alla rotazione attorno alla cerniera O porta a

$$-ml^2\ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0$$

che per piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio, definita da $\theta=0$, può essere così linearizzata

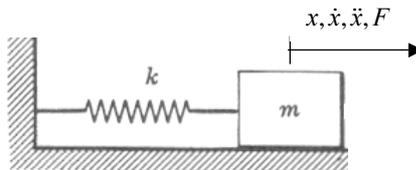
$$\sin \theta \approx \sin(0) + \left. \frac{d(\sin(\theta))}{d\theta} \right|_{\theta=0} \theta = \theta$$

$$-l\ddot{\theta} - g\theta = 0$$

dando luogo a una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti simile a quella già vista per il velivolo.

11.2 Sistema vibrante ad un grado di libertà: moto libero non smorzato

Trattiamo il problema delle vibrazioni a un solo g.d.l. in modo generale, studiando per ora il caso che sul sistema dinamico, considerato in assenza di attriti o smorzamento, non agiscano forze esterne.



Per mettere in equazione il modello meccanico, dobbiamo scegliere la coordinata libera, ovviamente la x , e sceglierne l'origine. Vedremo in seguito il motivo, ma risulta comodo misurare la coordinata libera (ovvero le coordinate libere in sistemi a più gradi di libertà) a partire dalla posizione di equilibrio statico.

Consideriamo un moto traslatorio della massa e scriviamo l'equazione di moto del sistema. Utilizzando gli equilibri dinamici, in una generica posizione deformata $x(t)$, agiranno sul corpo la forza d'inerzia e la forza di richiamo elastico della molla, ovvero

$$(11.1) \quad -m\ddot{x} - kx = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti, la cui soluzione è del tipo

$$(11.2) \quad x(t) = Ae^{\lambda t}$$

dove A è una costante arbitraria e λ un parametro da determinare. Sostituendo la soluzione (11.2) nell'equazione di partenza (11.1)

$$mA\lambda^2 e^{\lambda t} + kAe^{\lambda t} = 0$$

che, trascurando la soluzione banale $A = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \forall t (0 < t < \infty)$ che rappresenta la condizione di equilibrio statico, porta a

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega_0$$

La soluzione dell'equazione differenziale (11.1) è quindi data dalla combinazione lineare delle due soluzioni date da λ_1 e λ_2

$$(11.3) \quad x(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}$$

Lo spostamento $x(t)$ è una quantità reale, mentre per la forma dell'equazione essa è complessa per cui affinché $x(t) \in \mathfrak{R}$ possiamo ricordare che possiamo sempre moltiplicare la soluzione dell'omogenea per una costante arbitraria e quindi A_1 e A_2 possono essere reali o complesse.

Sviluppando trigonometricamente la soluzione (11.3)

$$x(t) = A_1 (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + A_2 (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t) = (A_1 + A_2) \cos \omega_0 t + i (A_1 - A_2) \sin \omega_0 t$$

Poiché $x(t)$ è una quantità reale, si vede che prendendo A_1 e A_2 complessi e coniugati ($A_1 = a + ib; A_2 = a - ib$) si ottiene

$$x(t) = A_1 (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + A_2 (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t) = 2a \cos \omega_0 t - 2b \sin \omega_0 t$$

ovvero

$$(11.4) \quad x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

Poiché entrambe le funzioni armoniche della (11.4) hanno lo stesso argomento:

$$(11.5) \quad x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

con

$$\begin{cases} C = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A} \end{cases}$$

Le due costanti (A, B) presenti nella soluzione (11.5), ovvero l'ampiezza C e la fase φ sono determinate attraverso le condizioni iniziali.

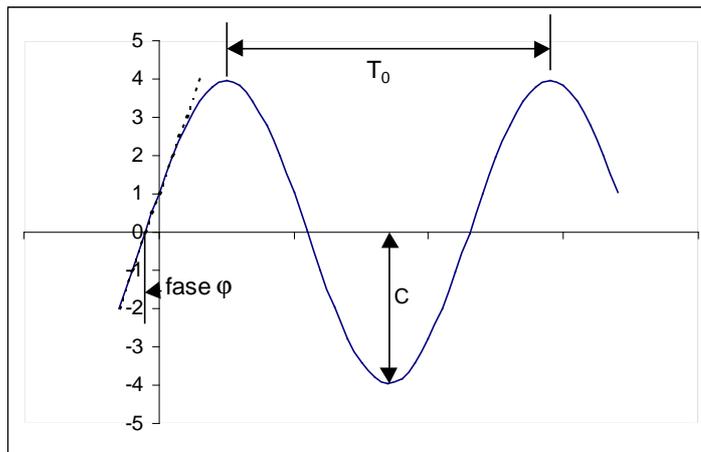
Supponiamo che al tempo $t=0$

$$(11.6) \quad \begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

Imponendo le (11.6) alla (11.5), si ottiene

$$\begin{cases} A = x_0 \\ B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \end{cases}$$

Il moto risulta armonico con periodo $T_0 = 2\pi/\omega_0$, indipendente dalle condizioni iniziali mentre ω_0 è detta pulsazione propria del sistema.



▼ x

Consideriamo ancora lo stesso oscillatore già visto, ma supponiamolo anche soggetto alla gravità.

Nel precedente esempio avevamo posto l'origine della coordinata libera ($x=0$) dove è nulla la forza esercitata dalla molla. Anche in questo caso porremo l'origine $y=0$ dove la molla è scarica.

L'equazione di equilibrio dinamico porta a

$$(11.7) \quad -m\ddot{y} - ky + mg = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + ky = mg$$

equazione differenziale lineare a coefficienti costanti completa.

Se prendiamo ora come origine della coordinata libera x la posizione di equilibrio statico sarà

$$y = x + \delta_{st}$$
$$\ddot{y} = \ddot{x}$$

con

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k}$$

che sostituite portano a

$$-m\ddot{x} - k\left(x + \frac{mg}{k}\right) + mg = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

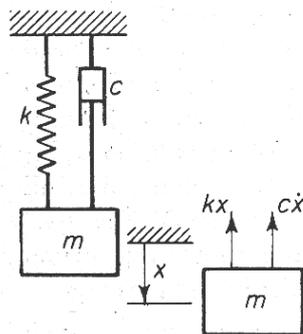
Ovvero, se non interessa lo studio del moto derivante in seguito all'applicazione di una forza costante nel tempo, conviene scegliere l'origine della coordinata libera nel punto di equilibrio statico in quanto si ottiene sempre un'equazione differenziale omogenea.

11.3 Sistema vibrante ad un grado di libertà: vibrazioni libere smorzate

Smorzamento viscoso

Durante la vibrazione libera, l'energia è dissipata in vari modi e un moto con ampiezza costante non può essere mantenuto senza che venga continuamente fornita energia.

È difficile una formulazione esatta del fenomeno dissipativo, in quanto questo può essere funzione dello spostamento, della velocità, dello stato di deformazione o di altro.



Un modello ideale, spesso soddisfacente, è quello dello smorzamento viscoso secondo il quale la forza dissipativa è espressa da

$$F = -r\dot{x} = -c\dot{x}$$

Dove r è utilizzato nella bibliografia italiana, mentre c in quella di lingua anglosassone.

L'equazione di equilibrio dinamico del nostro solito oscillatore diverrà quindi

$$(11.8) \quad -m\ddot{x} - r\dot{x} - kx = 0$$

che può essere risolta usando la solita forma

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

che sostituita nell'equazione differenziale di partenza (11.8) porta all'equazione lineare

$$\left(\lambda^2 + \frac{r}{m}\lambda + \frac{k}{m} \right) Ae^{\lambda t} = 0$$

che ammette come soluzioni non banali (per $A \neq 0$ e valide per qualsiasi valore di t)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

e la soluzione generale per la vibrazione libera smorzata è data da

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

dove A e B sono costanti arbitrarie dipendenti dalle condizioni iniziali.

Smorzamento critico

Il comportamento dell'oscillatore smorzato dipende dal valore numerico del radicando

$$\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}$$

Come parametro di riferimento utilizzeremo lo smorzamento critico r_c , ovvero quel valore di r che riduce il radicando a zero.

$$\frac{r_c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$$

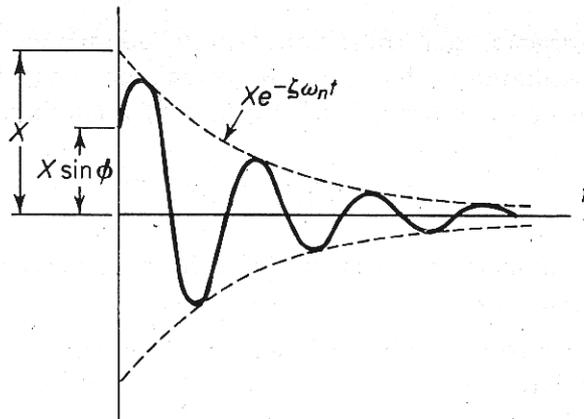
Lo smorzamento reale del sistema r può essere espresso in forma adimensionale, in funzione dello smorzamento critico r_c , dal rapporto

$$\zeta = r/r_c$$

detto anche indice di smorzamento. Ne consegue

$$\begin{aligned} \frac{r}{2m} &= \xi \frac{r_c}{2m} = \xi \omega_0 \\ \lambda_{1,2} &= \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \omega_0 \end{aligned}$$

Smorzamento minore di quello critico $\zeta < 1,0$

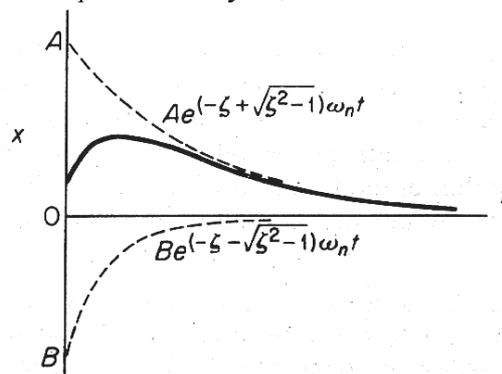


La soluzione generale diventa

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left(A e^{i \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t} + B e^{-i \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t} \right) = X e^{-\zeta \omega_n t} \left(\sin \left(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \phi \right) \right)$$

e il moto risulta periodico con pulsazione $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2} \omega_0$ e ampiezza decrescente nel tempo con legge esponenziale.

Smorzamento maggiore di quello critico $\zeta > 1,0$

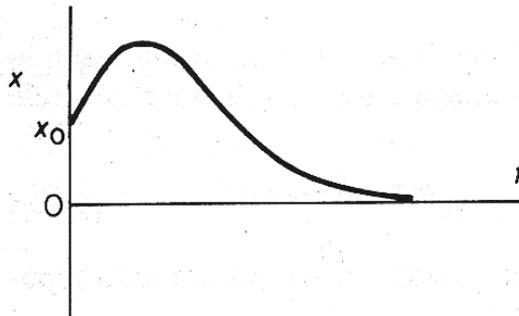


In questo caso le due radici sono reali ma opposte e la soluzione generale diventa

$$x(t) = A e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t} + B e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t}$$

Il moto non è più oscillatorio, ma si smorza col tempo in modo esponenziale.

Smorzamento uguale a quello critico $\zeta = 1,0$



In quest'ultimo caso le due radici sono reali e coincidenti. In questo caso l'integrale generale assumerà la forma

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$$

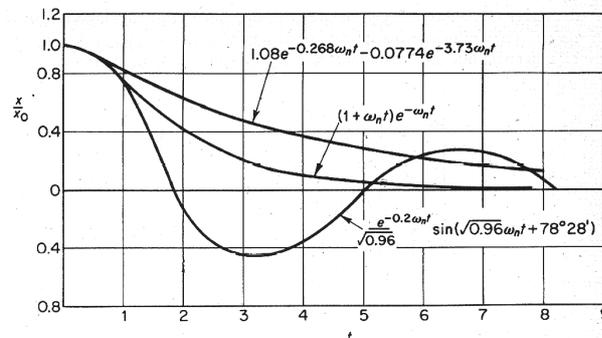
Per cui il moto libero non è più oscillatorio ma si smorza anch'esso in modo esponenziale.

Confrontando per lo stesso oscillatore l'andamento del moto libero al variare dell'indice di smorzamento ζ per le medesime condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

si nota che:

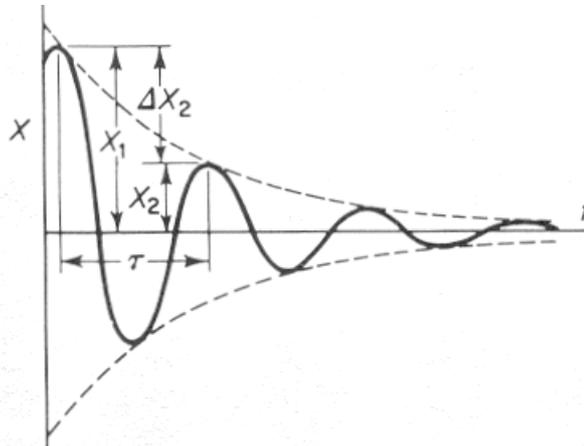
- indipendentemente dalle condizioni iniziali il moto libero si annulla sempre dopo un tempo più o meno lungo;
- a parità di condizioni iniziali, il tempo necessario per smorzarsi dipende da ζ ;
- a parità di condizioni iniziali, per $\zeta = 1$ il tempo è minimo (strumenti di misura, artiglierie, ecc.)



11.3.1 Identificazione dello smorzamento

Nell'ipotesi di avere uno smorzamento di tipo viscoso, sappiamo che la risposta del moto libero ha una legge del tipo

$$x(t) = |X| e^{-\xi \omega_0 t} \left(\sin \left(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t + \phi \right) \right).$$



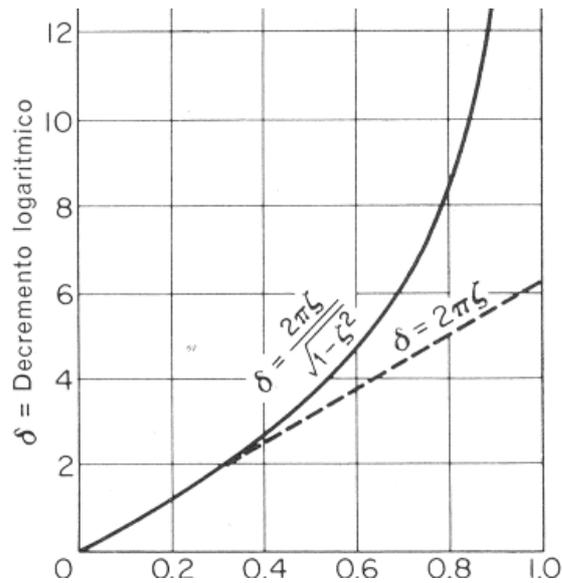
Quando $\sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t + \phi) = 1$, la risposta è tangente all'involuppo esponenziale $|X| e^{-\xi \omega_0 t}$, tuttavia le tangenti non sono orizzontali e i punti di tangenza sono leggermente spostati a destra del punto di massima ampiezza. Generalmente questo fatto è trascurabile e l'ampiezza del punto di tangenza può essere considerata coincidente con l'ampiezza massima.

Con riferimento alla simbologia indicata in figura, avremo che il decremento logaritmico

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{|X| e^{-\xi \omega_0 t}}{|X| e^{-\xi \omega_0 (t+T)}} = \xi \omega_0 T$$

Dal momento che $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$ avremo, anche, che

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cong 2\pi\xi \text{ per } \xi < 0,3$$



D'altronde ricordando che per una forzante armonica del tipo $F(t) = F_0 \sin \omega t$ il lavoro introdotto in un periodo in un sistema meccanico è pari a

$$(11.9) \quad L = \int_0^T F dx$$

e supponendo il sistema a regime con legge del moto pari a

$$x(t) = |X| \sin(\omega t - \phi)$$

ne deriva quindi che

$$dx = \frac{dx}{dt} dt \Rightarrow dx = |X| \omega \cos(\omega t - \phi) dt$$

e quindi la (11.9)

$$L = \omega F_0 |X| \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \omega t \cos(\omega t - \phi) dt = \pi F_0 |X| \sin \phi$$

Nell'ipotesi di smorzamento viscoso, il lavoro dissipato a regime, in assenza di assenza di altre forze agenti sul sistema meccanico in prova, sarà

$$L_D = \int_0^T -r\dot{x}dx = -r|X|^2 \omega^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t - \phi) dt = -r|X|^2 \omega^2 \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} = -r|X|^2 \omega \pi$$

da cui

$$L + L_D = \pi F_0 |X| \sin \phi - r|X|^2 \omega \pi = 0 \Rightarrow r = \frac{F_0 \sin \phi}{|X| \omega}$$

Dalla misura dell'energia dissipata scopriamo che, a parità di ampiezza imposta, il lavoro dissipato varia proporzionalmente con la frequenza, mentre a parità di frequenza si modifica con il quadrato dell'ampiezza di vibrazione.

Molte esperienze di laboratorio hanno dimostrato che se il fenomeno dissipativo è legato a fenomeni d'isteresi l'energia dissipata per ciclo è indipendente dalla frequenza di vibrazione, ma dipende solamente dal quadrato dell'ampiezza di deformazione e quindi di vibrazione, e quindi

$$L_D \propto -|X|^2 = -\alpha |X|^2$$

ovvero

$$L_D = -r_{eq} |X|^2 \omega \pi = -\alpha |X|^2 \Rightarrow r_{eq} = \frac{\alpha}{\omega \pi} = \frac{\beta}{\omega}$$

per cui l'equazione differenziale, la cui soluzione descrive il moto del sistema, diventa

$$m\ddot{x} + \frac{\alpha}{\pi\omega} \dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

il cui integrale particolare ha un'ampiezza

$$|X| = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2}}$$

che in risonanza vale

$$|X| = \frac{F_0 \pi}{\alpha}$$

11.3 Sistema vibrante ad un grado di libertà: moto forzato

Sempre in assenza di smorzamento e di attriti, vediamo ora cosa succede se applichiamo al sistema una forza esterna $F(t)$ che supponiamo per semplicità armonica, ovvero

$$F(t) = F_0 \sin \omega t$$

con F_0 e ω noti.

L'equazione di equilibrio per la massa m diventa

$$-m\ddot{x} - kx + F(t) = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

equazione differenziale lineare a coefficienti costanti completa il cui integrale generale è dato dall'integrale generale dell'omogenea associata più l'integrale particolare, ovvero

$$(11.10) \quad x(t) = x_g(t) + x_p(t)$$

$$(11.11) \quad x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + x_p(t)$$

con

$$x_p(t) = C \sin \omega t$$

integrale particolare che sostituito nell'equazione di partenza

$$-m\omega^2 C \sin \omega t + kC \sin \omega t = F_0 \sin \omega t \Rightarrow C = \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

quindi la (11.11) diventa

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \sin \omega t$$

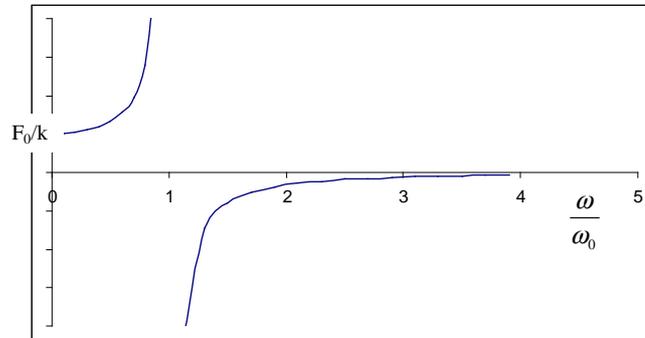
Il moto risultante risulta quindi somma di due funzioni armoniche, una con pulsazione ω_0 e l'altra con pulsazione ω .

Per effetto degli inevitabili smorzamenti, l'integrale generale dell'omogenea associata, come visto, tende a zero col crescere del tempo per cui a noi interessa

studiare il solo integrale particolare che rappresenta il comportamento vibratorio a regime del sistema.

$$x(t) \cong \frac{F_0}{k - m\omega^2} \sin \omega t$$

Analizziamo l'ampiezza C del moto a regime al variare dei parametri



- se la pulsazione della forzante tende a zero, l'ampiezza di vibrazione C tende a un valore pari alla deformazione indotta dalla forza F_0 applicata staticamente;
- se ω cresce, C aumenta, fenomeno dell'amplificazione dinamica, fino a un asintoto verticale per $\omega \rightarrow \omega_0 \Rightarrow C \rightarrow \infty$ (risonanza);
- se $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow C \rightarrow 0$

Attenzione se siamo in risonanza, la soluzione cade in difetto in primo luogo perché il comportamento della molla è lineare solo per piccoli spostamenti.

Inoltre, dobbiamo ricordare che le costanti A e B devono essere calcolate per la soluzione generale:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + x_p(t)$$

per cui

$$\begin{cases} x(0) = A + x_p(0) \\ \dot{x}(0) = B\omega_0 + \dot{x}_p(0) \end{cases}$$

supponendo per $t=0$ tanto lo spostamento, quanto la velocità siano nulle si ottiene

$$(11.12) \quad x(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$$

che fornisce una forma indeterminata del tipo $0/0$ per $\omega \rightarrow \omega_0$

Applicando alla (11.12) la regola di L'Hopital si ottiene

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} x(t) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) = \frac{F_0}{2k} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t)$$

per cui sarebbe comunque necessario tempo infinito, anche in condizioni ideali di linearità delle forze elastiche, per raggiungere ampiezze infinite.

Ricordando, infine

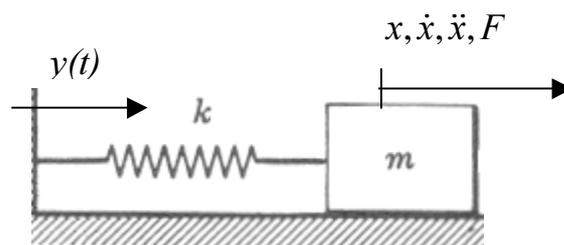
$$C = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0/k}{1 - \frac{m\omega^2}{k}} = \frac{\delta_{st}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

si definisce coefficiente di amplificazione dinamica H

$$H(\omega) = \frac{C}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

11.4 Sistema vibrante ad un grado di libertà: moto forzato per spostamenti di vincolo

Consideriamo il solito sistema che si muova rispetto a un osservatore assoluto con una legge $y(t)$ nota.



Definiamo $x(t)$ lo spostamento assoluto della massa e misuriamo gli spostamento dalla posizione di equilibrio statico che sarà definita da

$$y(t) = x(t) = x_r(t) = 0$$

Scrivendo l'equazione di equilibrio dinamico, otteniamo

$$-m\ddot{x} - k(x - y(t)) = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = ky(t)$$

equazione differenziale lineare a coefficienti costanti completa del tutto simile a quella già vista nel moto forzato.

Per un osservatore relativo, l'equazione di equilibrio dinamico, diventa invece

$$-m(\ddot{x}_r + \ddot{y}(t)) - kx_r = 0 \Rightarrow m\ddot{x}_r + kx_r = -m\ddot{y}(t)$$

Supponiamo ora che il moto del vincolo sia armonico di ampiezza b

$$y(t) = b \sin \omega t$$

per cui

$$m\ddot{x} + kx = kb \sin \omega t$$

che ha come integrale particolare

$$x_p(t) = \frac{kb}{k - m\omega^2} \sin \omega t = X \sin \omega t$$

ove X è l'ampiezza di vibrazione nel moto assoluto della massa m .

In termini adimensionali

$$\frac{X}{b} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

del tutto analogo al coefficiente di amplificazione H già definito.

Quando una molla potrà essere definita "rigida", quando non vi è moto relativo e quindi

$$\frac{X}{b} \cong 1 \Rightarrow \omega_0^2 \gg \omega^2$$

Consideriamo ora l'osservatore relativo

$$m\ddot{x}_r + kx_r = -m\ddot{y}(t) = m\omega^2 b \sin \omega t$$

e quindi

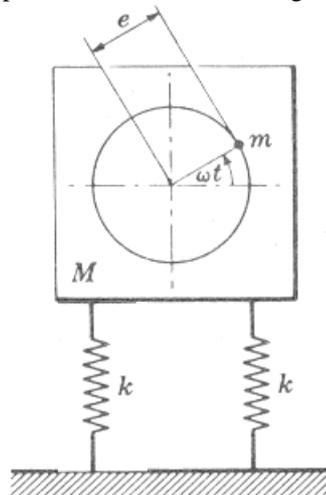
$$x_{rp}(t) = \frac{m\omega^2 b}{k - m\omega^2} \sin \omega t = X_r \sin \omega t$$

e in termini adimensionali

$$\frac{X_r}{b} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Moti forzati dovuti a squilibri rotanti

Supponiamo di avere una macchina con una parte rotante, avente massa propria M e uno squilibrio me . Supponiamo che la velocità angolare ω sia costante.



L'accelerazione assoluta della massa eccentrica sarà

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t = |\omega^2 e| e^{i\omega t} + \ddot{x}$$

Avremo quindi, misurando gli spostamenti x , positivi verso l'alto, a partire dalla posizione di equilibrio statico,

$$-M\ddot{x} - m(-\omega^2 e \sin \omega t + \ddot{x}) - 2kx = 0 \Rightarrow (M + m)\ddot{x} + 2kx = me\omega^2 \sin \omega t$$

e l'integrale particolare, in condizioni di regime, varrà

$$x_p(t) = \frac{me\omega^2}{2k - (M + m)\omega^2} \sin \omega t = X(\omega) \sin \omega t$$

e quindi

$$\frac{X(\omega)}{e} = \frac{m}{(M+m)} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{m}{(M+m)} \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Si noti che la macchina al variare della velocità trasmetterà al terreno una forza variabile nel tempo pari a

$$F_v = 2kX \sin \omega t$$

che forzerà il terreno a vibrare, non potendolo considerare infinitamente rigido, e questo forzerà a sua volta a vibrare, per spostamento di vincolo, le altre strutture posate su di esso.

Ovviamente, equilibrando la macchina, ovvero facendo in modo che il suo asse di rotazione sia baricentrico (e anche principale d'inerzia come vedremo) la forzante si annulla e il fenomeno scompare in quanto l'equazione di moto risulta essere la soluzione di

$$(M+m)\ddot{x} + 2kx = 0$$

11.5 Sistema vibrante ad un grado di libertà: vibrazioni forzate smorzate con eccitazione armonica

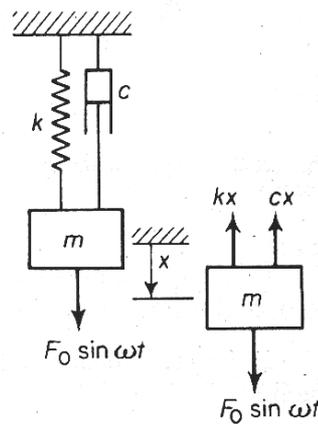
La soluzione a regime per un'eccitazione di tipo armonico ha una validità del tutto generale in quanto:

- un'eccitazione periodica è scomponibile, sotto ipotesi largamente accettabili e verificate nella pratica, in una serie di eccitazioni armoniche (serie di Fourier);
- i sistemi meccanici di cui ci occupiamo sono descritti da equazioni differenziali lineari e quindi vale il principio di sovrapposizione degli effetti;

Quindi, la risposta del sistema meccanico è fornita dalla sovrapposizione delle risposte alle singole componenti armoniche in cui è sviluppabile la generica eccitazione periodica.

Inoltre, tali risposte, in condizioni di regime, sono date dai soli integrali particolari in quanto gli integrali generali delle omogenee associate, per effetto delle inevitabili dissipazioni, tendono comunque a zero in un tempo più o meno lungo.

Soluzione a regime con smorzamento viscoso



L'equazione differenziale del moto può essere scritta come

$$-m\ddot{x} - r\dot{x} - kx = -F_0 \sin \omega t = -F_0 e^{i\omega t}$$

la cui soluzione è data da

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t)$$

Tralasciamo, per quanto più volte detto, il contributo dell'integrale generale dell'omogenea associata e quindi a regime

$$x(t) \cong x_p(t)$$

con

$$x_p(t) = X e^{i\omega t} = |X| e^{-i\phi} e^{i\omega t} = |X| e^{i(\omega t - \phi)} = |X| \sin(\omega t - \phi)$$

con X e ϕ calcolati sostituendo nell'equazione differenziale l'integrale particolare.

Sostituendo $x_p(t) = X e^{i\omega t}$ nell'equazione differenziale di partenza

$$-m\ddot{x} - r\dot{x} - kx = -F_0 e^{i\omega t}$$

otteniamo

$$(-m\omega^2 + ir\omega + k)X e^{i\omega t} = -F_0 e^{i\omega t}$$

che ammette come soluzione valida per tutti i valori di t

$$X = \frac{-F_0}{(k - m\omega^2) + ir\omega} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (r\omega)^2}} e^{i(\phi - \pi)}$$

con

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega r}{k - m\omega^2}$$

Ricordando che:

- $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ frequenza propria del sistema equivalente non smorzato
- $\xi = r/r_c$ fattore di smorzamento
- $r_c = 2m\omega_0$ smorzamento critico
- $X_0 = F_0/k$ freccia del sistema per effetto della forzante F_0 a frequenza

nulla

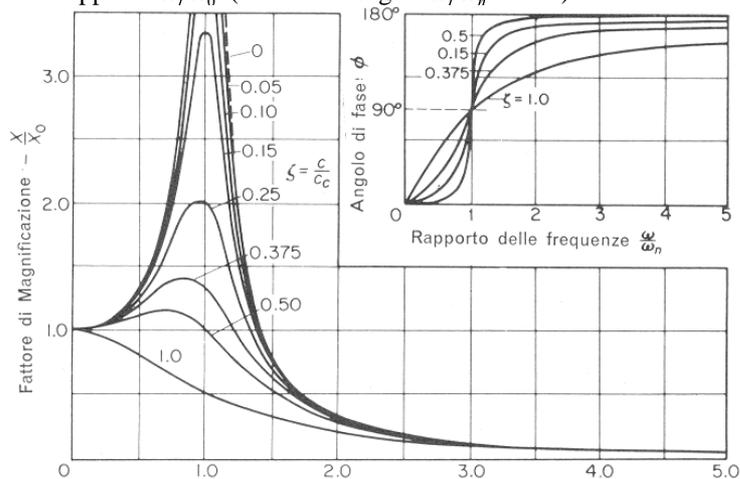
otteniamo

$$\frac{|X|}{X_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

e

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Possiamo rappresentare graficamente l'andamento dell'integrale particolare in funzione del rapporto ω/ω_0 (N.B. nel disegno ω/ω_n e $c=r$)

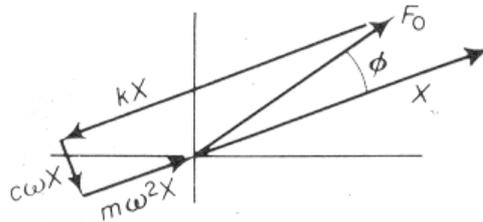


Si notano tre zone: per $\omega/\omega_0 < 1$; per $\omega/\omega_0 = 1$ e per $\omega/\omega_0 > 1$

Effettuiamo un'analisi qualitativa del comportamento del sistema studiando il diagramma vettoriale delle forze agenti sulla massa.

- $\omega/\omega_0 < 1$

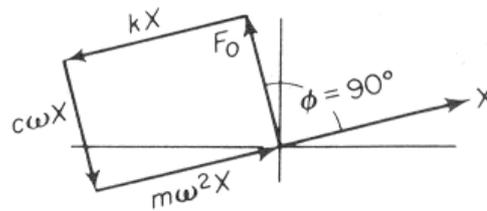
L'angolo di fase è piccolo e quindi è la forza della molla a equilibrare la forzante esterna cui si somma la forza d'inerzia



- $\omega/\omega_0 = 1$

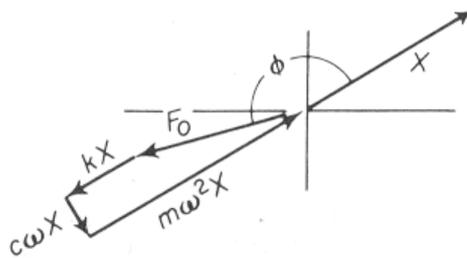
L'angolo di fase è pari a 90° per cui la forzante esterna è equilibrata dalla forza viscosa. L'ampiezza di vibrazione a regime è pari a

$$|X| = \frac{F_0}{r\omega_0} = \frac{X_0}{2\xi}$$



- $\omega/\omega_0 > 1$

L'angolo di fase si avvicina a 180° e la forza impressa è equilibrata quasi integralmente da quella d'inerzia



11.5.1 Isolamento delle vibrazioni

Come abbiamo visto, la forzante armonica impressa al nostro oscillatore potrebbe essere dovuta a un macchinario ruotante con velocità angolare ω posto sulla massa di fondazione.

La forza trasmessa al terreno al generico tempo t , sarà

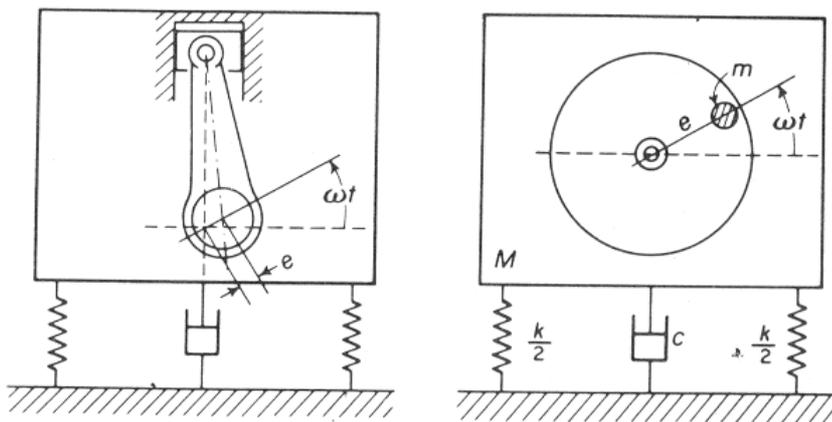
$$F_{tr}(t) = kx + r\dot{x} = kXe^{i\omega t} + ir\omega Xe^{i\omega t} = X(k + ir\omega)e^{i\omega t} = F_{tr}e^{i\omega t}$$

dove

$$|F_{tr}| = \frac{F_0 \sqrt{k^2 + (r\omega)^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (r\omega)^2}}$$

ovvero

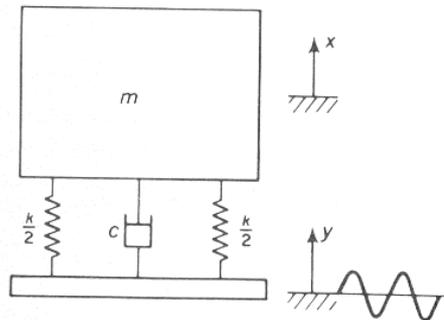
$$\frac{|F_{tr}|}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$



Come già visto questa forzante armonica applicata al terreno lo porterà a vibrare con un'ampiezza b ovvero con una legge del tipo

$$y(t) = b \sin \omega t$$

che forzerà le strutture circostanti



Per questa struttura l'equazione di equilibrio dinamico è

$$-m\ddot{x} - r(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y) = 0$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = r\dot{y} + ky = b(i\omega r + k)e^{i\omega t}$$

e il relativo integrale particolare

$$|X| = \frac{b\sqrt{k^2 + (r\omega)^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (r\omega)^2}}$$

ovvero

$$\frac{|X|}{b} = \frac{\sqrt{1 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Si noti che pur essendo due fenomeni diversi, la soluzione è del tutto analoga a quella della forza trasmessa

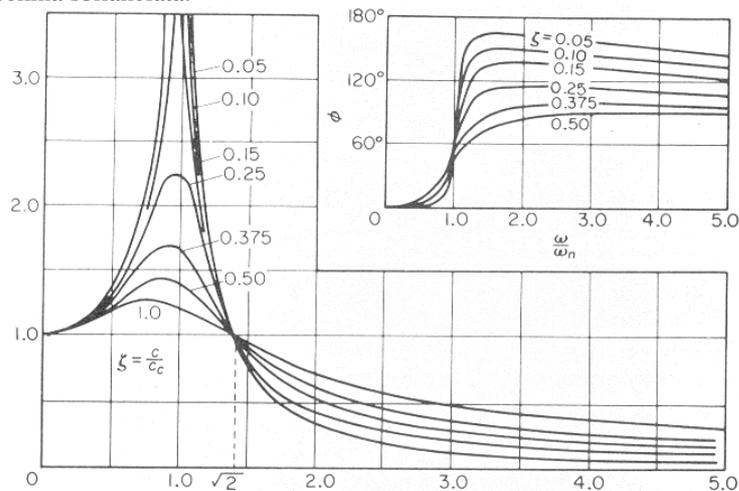
$$\frac{|F_r|}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

In entrambi i casi interessa che la soluzione sia $\ll 1$ tanto per la forza trasmessa al terreno quanto per la trasmissibilità $\beta = |X|/b$

I parametri di progetto sono:

- per la macchina eccitatrice M , ω e m_e

- per la struttura eccitata m , b e ovviamente ω che è uguale a quello della macchina sbilanciata.



Diagrammiamo l'andamento di $\beta = |X|/b$ al variare di ω/ω_0 . Si nota che per $\omega/\omega_0 = \sqrt{2}$ la trasmissibilità è pari a 1 e che al crescere del rapporto tra le frequenze la trasmissibilità scende fino a tendere asintoticamente a zero per $\omega/\omega_0 \rightarrow \infty$.

Questo fatto avviene indipendentemente dal valore dell'indice di smorzamento ξ il cui effetto è quello, al suo aumento, di ridurre l'ampiezza di vibrazione per $\omega/\omega_0 = 1$, ma d'altro lato rallenta la diminuzione di β per $\omega/\omega_0 > \sqrt{2}$.

Riassumendo, converrebbe, quindi scegliere $\omega/\omega_0 > \sqrt{2} \Rightarrow k < m\omega^2/2$ e nel contempo avere valori di ξ piccoli per non ricorrere a k troppo piccoli.

Poiché abbiamo scelto di far operare la fondazione con $\omega/\omega_0 > \sqrt{2}$, ciò significa che tutte le volte che avvieremo o fermeremo il macchinario, entrambe le nostre fondazioni, durante il transitorio, si troveranno a passare per $\omega/\omega_0 = 1$ e quindi non conviene avere valori dell'indice di smorzamento trascurabili in quanto ciò porterebbe ad ampiezze in risonanza elevate che creerebbero problemi ai collegamenti verso l'esterno del macchinario.

In secondo luogo, operare con valori di ξ piccoli significa anche non poter più trascurare l'integrale generale dell'omogenea associata, parte della soluzione che torna a essere presente tutte le volte che avvengono delle perturbazioni, per quanto piccole, delle condizioni di regime.

I problemi maggiori vengono, tuttavia, creati da k . Dal diagramma si vede, a esempio, che per ridurre del 60% le vibrazioni nelle strutture circostanti dobbiamo avere $\omega/\omega_0 \geq 2$ ovvero

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \leq \frac{\omega}{2} \Rightarrow k \leq \frac{m\omega^2}{4}$$

Tale ragionamento porterebbe a scegliere $\omega_0 \rightarrow 0$, ma

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega_0^2} \therefore \delta_{st} \propto \frac{1}{\omega_0^2}$$

ovvero dovremmo realizzare fondazioni con frecce statiche molto grandi, e tale problema è ovviamente di impossibile soluzione se abbiamo macchine lente in cui ω è dell'ordine di qualche centinaio di giri/1'.

La rigidità k è esprimibile come

$$k = \frac{F}{\Delta h} = \frac{F}{h \cdot \epsilon} = \frac{F \cdot E}{h \cdot \sigma} = \frac{F \cdot E \cdot A}{h \cdot F} = \frac{E \cdot A}{h}$$

quindi per ridurre k , scelto un materiale e quindi il modulo di elasticità E , dovremo avere delle aree A piccole e degli spessori h degli elementi elastici (a esempio un tappeto di gomma) grandi.

Ma

$$A > \frac{F}{\sigma_{am}} > \frac{mg}{\sigma_{am}} \therefore k > \frac{mg \cdot E}{\sigma_{am} \cdot h}$$

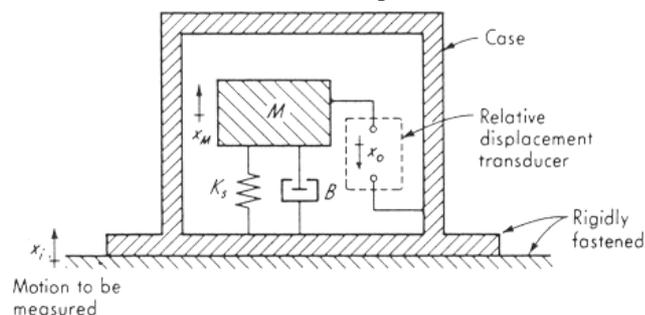
ovvero

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} > \frac{g \cdot E}{\sigma_{am} \cdot h}$$

da cui si nota come dovremmo avere bassi valori di E e corrispondentemente, impossibili nei materiali, alti valori σ_{am} e comunque alti valori di h , che creerebbe problemi d'instabilità.

11.5.2 Strumenti di misura delle vibrazioni

Tra le applicazioni del nostro oscillatore vi è quella di usarlo come strumento per la misura delle vibrazioni assolute di un corpo



Con riferimento alle grandezze indicate nella figura e ai relativi versi positivi degli spostamenti, avremo che

$$K_s x_0 + B\dot{x}_0 = M\ddot{x}_M = M(\ddot{x}_i - \ddot{x}_0)$$

che può essere riscritta usando le nostre consuete notazioni come

$$kx_0 + r\dot{x}_0 = M\ddot{x}_M = M(\ddot{x}_i - \ddot{x}_0)$$

dove

$$x_i(t) = |X_i| \sin(\omega_i t - \psi_i)$$

è l'andamento temporale dell'i-sima componente armonica (serie di Fourier) dello spostamento incognito $x(t)$ del vincolo.

Riordinando l'equazione avremo

$$M\ddot{x}_0 + r\dot{x}_0 + kx_0 = M\ddot{x}_i = -\omega_i^2 |X_i| M e^{j(\omega_i t - \psi_i)}$$

il cui integrale particolare vale

$$X_{0i} = \frac{-\omega_i^2 |X_i| M e^{-j\psi_i}}{(-\omega_i^2 M + k) + jr\omega_i} = \frac{-\frac{\omega_i^2}{\omega_0^2} |X_i| e^{-j\psi_i}}{\left(1 - \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}\right) + j2\xi \frac{\omega_i}{\omega_0}} = |X_{0i}| e^{-j\phi_i}$$

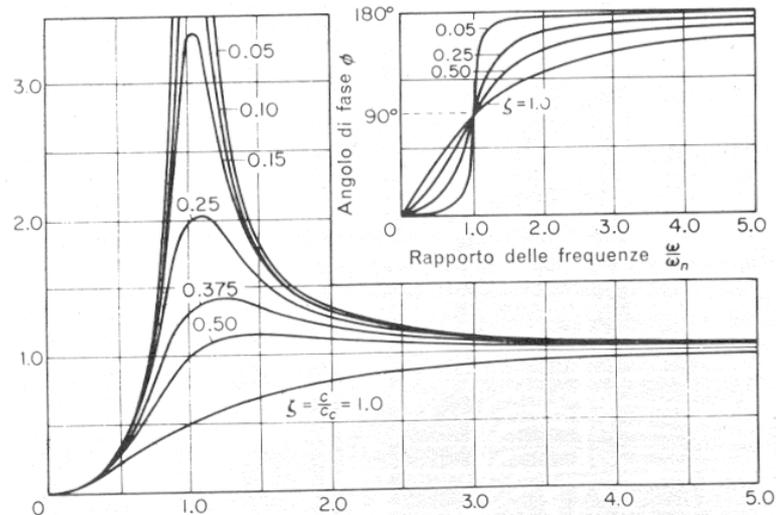
$$\text{con } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \text{ e } \xi = \frac{r}{r_c} = \frac{r}{2M\omega_0}$$

Se riferiamo le fasi della risposta a quelle delle componenti armoniche avremo che

$$X_{0i} = \frac{-\frac{\omega_i^2}{\omega_0^2} |X_i|}{\left(1 - \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}\right) + j2\xi \frac{\omega_i}{\omega_0}} = |X_{0i}| e^{-j(\phi_i - \psi_i)} = |X_{0i}| e^{-j\beta_i}$$

otteniamo

$$\frac{|X_{0i}|}{|X_i|} = \frac{-\frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega_i}{\omega_0}\right)^2}} \quad \beta_i = \tan^{-1} \frac{2\xi \frac{\omega_i}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega_i}{\omega_0}\right)^2}$$



Si nota, quindi, che se $\omega_i \gg \omega_0$ (almeno 4-5 volte) la misura dell'ampiezza della vibrazione relativa permette di ricavare quella incognita di trascinamento.

Ovviamente, affinché la misura non sia distorta, deve essere

$$\frac{|X_{0i}|}{|X_i|} = \text{costante e } \beta_i = n\pi \quad (n=0,1,2,\dots,N) \quad \text{per } i = 1,2,3,\dots,N$$

Questa esigenza porta che il sismografo, tale è il nome dello strumento, abbia una frequenza propria $\omega_0 < \omega_i/4$ e tale condizione verifica automaticamente che non vi sia distorsione per le componenti armoniche di ordine superiore.

I sismografi sono, quindi strumenti pesanti e ingombranti dovendo avere una frequenza propria necessariamente bassa e normalmente si usano indici di smorzamento ξ dell'ordine di 0,6-0,7 per ridurre l'effetto delle condizioni iniziali.

Nel caso duale di $\omega_i \ll \omega_0$ risulta che $\frac{|X_{0i}|}{|X_i|} \cong 0$ per cui

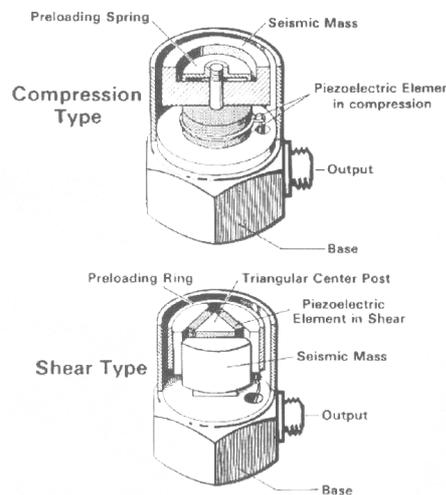
$$\ddot{x}_M(t) = \ddot{x}_i(t) - \ddot{x}_0(t) \cong \ddot{x}_i(t)$$

e la forza d'inerzia agente sulla massa M è praticamente dovuta al solo moto di trascinamento, per cui se riuscissimo a misurare la reazione della molla questa, a meno del guadagno, sarebbe pari all'accelerazione incognita del vincolo.

Ovviamente la necessità di non distorcere la misura porta che la condizione $\omega_i \ll \omega_0$ sia verificata per la massima frequenza presente nello sviluppo in serie del segnale incognito, ovvero ω_0 deve essere dell'ordine dei kHz. Dobbiamo avere, quindi, masse M e rigidità k molto grandi.

Spesso come elemento elastico si usa una lastra di quarzo, materiale piezoelettrico che, se sollecitato lungo l'asse elettrico, produce sulle facce ortogonali all'asse delle cariche di segno opposto proporzionali alla forza applicata (circa 2 pC/N)

L'uso del quarzo limita la frequenza minima di misura (dell'ordine dell'Hz).



Riscrivendo l'equazione differenziale in coordinate assolute

$$M\ddot{x}_{Mi} + r\dot{x}_{Mi} + kx_{Mi} = kx_i + r\dot{x}_i = (k + j\omega_i r) |X_i| e^{j(\omega_i t - \psi_i)}$$

otteniamo l'integrale particolare

$$x_{Mi}(t) = X_{Mi} e^{j\omega_i t}$$

con

$$X_{Mi} = \frac{(k + j\omega_i r) |X_i| e^{-j\psi_i}}{(k - M\omega_i^2) + j\omega_i r} = |X_{Mi}| e^{j\beta_i}$$

ovvero

$$|X_{Mi}| = \frac{\sqrt{k^2 + (\omega_i r)^2} |X_i|}{\sqrt{(k - M\omega_i^2)^2 + (\omega_i r)^2}} \Rightarrow \frac{|X_{Mi}|}{|X_i|} = |H_i| = \frac{\sqrt{k^2 + (\omega_i r)^2}}{\sqrt{(k - M\omega_i^2)^2 + (\omega_i r)^2}}$$

$$\beta_i = \tan^{-1} \frac{-\omega_i r (2k - M\omega_i^2)}{-k^2 + kM\omega_i^2 + (\omega_i r)^2}$$

Utilizzando, a esempio, un fattore di smorzamento $\xi = 0,7$ si nota che la fase varia, per un range di frequenza compreso tra $0,6 \omega_0$ e ω_0 , con legge pari a $\beta_i \propto \frac{\omega_i}{\omega_0} = \frac{i\omega_1}{\omega_0}$ e quindi

$$x_{Mi}(t) = \sum_{i=1}^{N/2} |H_i| |X_i| \sin(\omega_i t + \beta_i) = \sum_{i=1}^{N/2} |H_i| |X_i| \sin\left(i\omega_1 t + ki \frac{\omega_1}{\omega_0}\right)$$

$$x_{Mi}(t) = \sum_{i=1}^{N/2} |H_i| |X_i| \sin\left(i\omega_1 \left(t + \frac{k}{\omega_0}\right)\right) = \sum_{i=1}^{N/2} |H_i| |X_i| \sin(i\omega_1 t')$$