

CAPITOLO 10

AZIONAMENTO ELETTROMECCANICO IN CORRENTE CONTINUA

10.1 Considerazioni generali

Se un conduttore percorso da corrente è posto in un campo magnetico, su di esso nasce una forza perpendicolare al piano individuato dal flusso magnetico e dal vettore corrente. Analogamente se un conduttore viene mosso all'interno di un campo magnetico, nasce una differenza di potenziale elettrico E sul conduttore di entità pari a:

$$(10.1) \quad E = BLv$$

dove L è la lunghezza del conduttore, v la sua velocità e B l'intensità del flusso magnetico.

La realizzazione di una macchina elettrica in corrente continua prevede pertanto che il conduttore venga messo in moto all'interno di un campo magnetico realizzato mediante magneti permanenti o in alternativa mediante un circuito di induzione.

Il motore in c.c. è costituito da un rotore e da uno statore: nello statore è presente un sistema di magneti permanenti (motore a magneti permanenti) oppure una serie di avvolgimenti percorsi da una corrente d'eccitazione (motori a campo avvolto) che generano un campo magnetico fisso nello spazio entro cui si muove il rotore. Quest'ultimo è costituito da un albero sulla cui periferia è presente un avvolgimento formato da una serie di conduttori (avvolgimento d'armatura). Tale avvolgimento è munito di numerose prese equidistanti connesse ad un cilindro costituito da tante lamelle, isolate tra loro, su cui poggiano le spazzole che costituiscono il collegamento elettrico (strisciante) tra rotore e statore. I motori a magneti permanenti, così come quelli a campo avvolto se la corrente di eccitazione è mantenuta costante, vengono regolati attraverso la tensione di armatura e_a ; naturalmente esistono altri modi per comandare un motore in c.c., ad esempio attraverso la corrente d'armatura i_a .

Quando il rotore si muove all'interno del campo magnetico, su di esso si manifestano due fenomeni, uno elettrico e uno meccanico:

- compare una forza controelettromotrice e_b , proporzionale alla velocità angolare $\dot{\theta}$ secondo un coefficiente costante K_b ;

$$(10.2) \quad e_b = K_b \dot{\theta}$$

- compare una coppia motrice proporzionale alla corrente d'armatura i_a , secondo un coefficiente di coppia K ;

$$(10.3) \quad C = K i_a$$

Nei motori a magneti permanenti K_b e K sono costanti, mentre in quelli avvolti esse sono proporzionali al flusso magnetico generato dagli avvolgimenti sullo statore, il quale è proporzionale a sua volta alla corrente di eccitazione.

La prima caratteristica da considerare in un motore consiste nella sua impedenza elettrica. La miglior via di determinazione è sperimentale mediante una sua identificazione: fissato il rotore e applicando al motore una tensione armonica a frequenza variabile, è possibile misurare la corrente risultante e determinare la caratteristica tra corrente e tensione. Il circuito elettrico equivalente risulta formato da una resistenza in serie ad una sistema di resistenza e induttanza in parallelo tra loro, secondo lo schema riportato in figura 10.1.

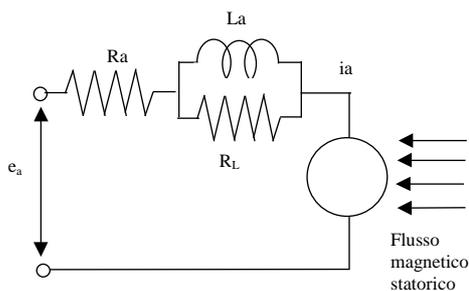


Fig 10.1 – Il modello del motore in corrente continua

In tale sistema R_a e L_a rappresentano rispettivamente la resistenza e l'induttanza dell'armatura, e_a ed i_a la tensione e la corrente di armatura. La presenza della resistenza R_L viene spiegata attraverso le perdite nel circuito magnetico: tale valore

R_L si presenta molto maggiore del corrispondente R_a (5-10 volte) ritenendo pertanto il suo effetto trascurabile.

Il circuito elettrico equivalente diventa pertanto come in figura 10.2 ed è pertanto possibile scrivere l'equazione di chiusura della maglia (annullamento delle tensioni sulla maglia) per l'avvolgimento rotorico

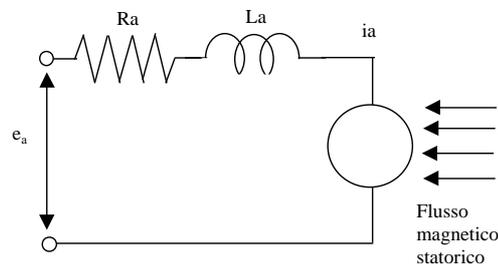


Fig 10.2 – Il modello del motore in corrente continua

:

$$(10.4) \quad L_a \dot{i}_a + R_a i_a + e_b = e_a$$

dove la forza elettromotrice risulta proporzionale alla velocità angolare del rotore stesso:

$$(10.5) \quad e_b = K_b \dot{\vartheta}$$

10.2 L'azionamento in corrente continua

Si consideri un sistema costituito da un motore in c.c. con un carico inerziale. In questa fase si vuole giungere alla scrittura delle equazioni di moto facendo alcuni cenni alla regolazione di tale sistema.

Il sistema in esame è pertanto costituito da una massa m all'estremità di una trave priva di massa e schematizzabile come un corpo rigido di lunghezza L .

L'altro estremo della trave è vincolato tramite una cerniera in modo tale essa possa compiere un moto nel piano orizzontale. Supponendo che gli attriti che si sviluppano nella cerniera siano rappresentabili con uno smorzatore di tipo viscoso, nascerà una coppia resistente proporzionale alla velocità di rotazione della trave tramite il coefficiente di smorzamento viscoso equivalente r .

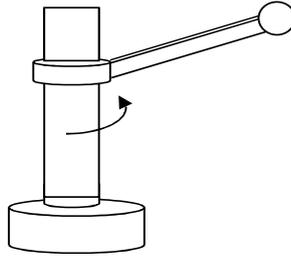


Fig. 10.3 – Un carico inerziale

E' possibile scrivere l'equazione di moto del sistema tenendo conto dell'inerzia del motore J_m e del carico ridotte all'albero motore $J_L=ml^2$ e di inevitabili dissipazioni introdotte nel modello attraverso il termine proporzionale alla velocità:

$$(10.6) \quad (J_m + J_L)\ddot{\theta} + r\dot{\theta} = C$$

Ricordando l'espressione della coppia motrice (10.3) e le (10.4) e (10.5), si ottiene il sistema di equazioni:

$$(10.7) \quad \begin{cases} J\ddot{\vartheta} + r\dot{\vartheta} - Ki_a = 0 \\ L_a\dot{i}_a + R_a i_a + K_b\dot{\vartheta} = e_a \end{cases}$$

dove con J si è indicata l'inerzia totale comprensiva sia del momento d'inerzia del motore che del carico.

Il sistema di equazioni descrive pertanto la dinamica del sistema: si nota come la dinamica delle variabili di stato caratteristiche del motore sono mutuamente influenzate con le grandezze di stato caratteristiche della meccanica.

In conclusione si vuole mostrare come spesso anche le discipline legate al controllo e all'automatica diventino parte integrante della modellazione dinamica.

Si pensi infatti di voler portare il sistema in una posizione desiderata o di riferimento ϑ_{rif} . L'azione della coppia C deve essere così regolata in modo da minimizzare la differenza tra la posizione angolare ϑ e quella di riferimento ϑ_{rif} .

Essendo il motore l'organo di attuazione, la regolazione avviene tramite la tensione e_a di alimentazione che assumerà, ad esempio, la forma:

$$(10.8) \quad e_a = K_p (\vartheta_{rif} - \vartheta)$$

Risolvendo il sistema di equazioni:

$$(10.9) \quad \begin{cases} J\ddot{\vartheta} + r\dot{\vartheta} - Ki_a = 0 \\ L_a \dot{i}_a + R_a i_a + K_b \dot{\vartheta} = K_p (\vartheta_{rif} - \vartheta) \end{cases}$$

Tale sistema costituisce un sistema controllato in anello chiuso con una retroazione proporzionale all'errore angolare. L'obiettivo del controllo è quello di fare in modo che la rotazione del braccio $\vartheta(t)$ segua al meglio l'andamento desiderato $\vartheta_{rif}(t)$ (controllo in posizione). In questo esempio la grandezza in ingresso è la posizione angolare di riferimento del braccio $\vartheta_{rif}(t)$, mentre la grandezza in uscita è la posizione angolare effettivamente assunta dal braccio stesso $\vartheta(t)$.

10.3 Azionamento in c.c. di un compressore

Obiettivo è regolare la velocità angolare di una compressore azionato da un motore in corrente continua. Il motore in c.c. è costituito da un rotore di momento d'inerzia J_m .

Sul rotore agisce una coppia motrice proporzionale alla corrente d'armatura i_a , secondo un coefficiente di coppia K ;

$$(10.10) \quad C_m = K i_a$$

La curva caratteristica del motore si presenta come lineare, funzione parametrica della tensione di alimentazione e_a

La curva caratteristica del compressore può essere in prima approssimazione schematizzata come una funzione proporzionale al quadrato della velocità angolare:

$$C_r = r \omega^2$$

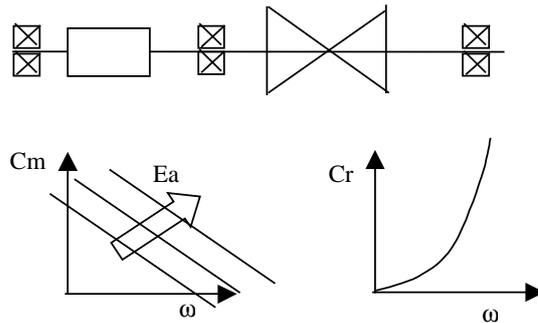


fig. 10.4 – Il motore di azionamento di un compressore e le relative curve caratteristiche

E' possibile scrivere l'equazione di moto dell'albero:

$$(10.11) \quad J \dot{\omega} = C_m - C_r$$

dove con J si è indicata l'inerzia totale comprensiva sia del momento d'inerzia del motore che del compressore.

Sostituendo l'equazione caratteristica del compressore e del motore si ottiene:

$$(10.12) \quad J \dot{\omega} + r \omega^2 = K i_a$$

Per ricavare ora la corrente i_a in funzione della grandezza di regolazione e_a tensione di alimentazione del motore, si deve ricorrere al già presentato modello del motore.

$$(10.13) \quad L_a \dot{i}_a + R_a i_a + e_b = e_a$$

Le equazioni della dinamica del sistema diventano pertanto

$$(10.14) \quad \begin{cases} J \dot{\omega} + r \omega^2 - K i_a = 0 \\ L_a \dot{i}_a + R_a i_a + K_b \omega = e_a \end{cases}$$

e quindi possono essere viste nella forma:

$$(10.15) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\omega} = -\frac{r}{J}\omega^2 + \frac{K}{J}i_a \\ \dot{i}_a = -\frac{R_a}{L_a}i_a - \frac{K_b}{L_a}\omega + \frac{1}{L_a}e_a \end{array} \right.$$

Definendo ora il vettore di stato $\underline{x} = \begin{bmatrix} \omega \\ i_a \end{bmatrix}$ e il vettore $\underline{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_a \end{bmatrix}$ il sistema di equazioni può essere scritto nella forma:

$$(10.16) \quad \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + [B]\underline{u}$$

Tale equazione, come si vede, è non lineare e permette, una volta nota la tensione e_a , di ricavare la velocità angolare del sistema. Naturalmente tale modello può fornire data la velocità e l'accelerazione angolare, la tensione di alimentazione del motore stesso: tale applicazione che sfrutta la dinamica inversa del sistema, può ad esempio servire per controllare in anello aperto la velocità del compressore stesso. Naturalmente tale logica di controllo in anello aperto soffre degli inconvenienti derivanti dal non considerare i disturbi esterni e le incertezze del modello stesso.

Si possono integrare numericamente le (10.15) e analizzare la risposta ad assegnati andamenti della tensione $e_a(t)$. Alternativamente si può effettuare l'analisi linearizzando le equazioni di moto nell'intorno di una assegnata velocità ω_0 ritenuta costante.

Tale analisi si effettua risolvendo il sistema di equazioni algebriche non lineari:

$$\underline{0} = f(\underline{x}) + [B]\underline{u}$$

essendo la soluzione costante.

$$(10.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} i_a = \frac{r}{K}\omega_0^2 \\ e_a = -R_a i_a + K_b \omega_0 \end{array} \right.$$

da cui è possibile determinare la tensione necessaria e la conseguente corrente che circola nel circuito statorico o viceversa conoscere la velocità angolare ad una assegnata tensione di alimentazione e_{a0} .

Tale soluzione può essere inoltre vista in forma grafica come in figura 10.3, permettendo ancora una volta di ricavare nota e_{a0} la velocità angolare di regime e la coppia di regime:

$$C_{m0} = \frac{K}{R_a} e_{a0} - \frac{K K_b}{R_a} \omega_0$$

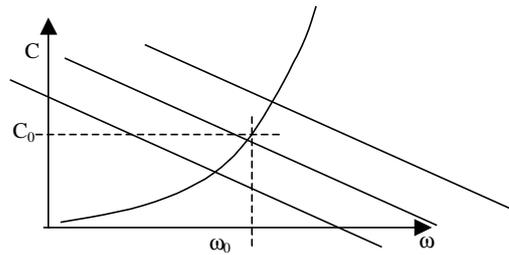


fig. 10. 5 – Condizione di moto a regime

10.4 L'analisi di stabilità del sistema

Si possono a questo punto linearizzare le equazioni di moto non lineari nell'intorno della posizione di equilibrio:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ i_{a0} \end{bmatrix}$$

ovvero indicando con: $\left. \begin{array}{l} \bar{\omega} = \omega - \omega_0 \\ \bar{i}_a = i_a - i_{a0} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\underline{x}} = \underline{x} - \underline{x}_0$

si ottiene

$$\dot{\bar{\underline{x}}} = f(\underline{x}_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \right)_0 \bar{\underline{x}} + [B] \underline{u}$$

ma

$$f(\underline{x}_0) + [B] \underline{u}_0 = \underline{0}$$

per cui l'equazione diventa

$$\dot{\bar{\underline{x}}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \right)_0 \bar{\underline{x}} + [B] \bar{\underline{u}} = [A] \bar{\underline{x}} + [B] \bar{\underline{u}}$$

con

$$[A] = \begin{bmatrix} -\frac{2r\omega_0}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K_b}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}$$

L'omogenea associata:

$$\dot{\underline{x}} = [A]\underline{x}$$

ammette la soluzione:

$$\underline{x} = \underline{\bar{X}}e^{\lambda t}$$

che sostituita nell'omogenea associata

$$([A] - [I]\lambda)\underline{\bar{X}}e^{\lambda t} = \underline{0}$$

Il sistema di equazioni ammette soluzione diversa da quella banale $\underline{X} = \underline{0}$ se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo ovvero se:

$$\det \begin{bmatrix} -\frac{2r\omega_0}{J} - \lambda & \frac{K}{J} \\ -\frac{K_b}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

che sviluppato il determinante porta a:

$$(10.18) \quad \lambda^2 + \lambda \left(\frac{2r\omega_0}{J} + \frac{R_a}{L_a} \right) + \frac{K_b K + 2r\omega_0 R_a}{L_a J} = 0$$

Risolvendo l'equazione caratteristica precedente è possibile calcolare le radici (o autovalori) del sistema che sono un indice della stabilità dello stesso:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(- \left(\frac{2r\omega_0}{J} + \frac{R_a}{L_a} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{2r\omega_0}{J} + \frac{R_a}{L_a} \right)^2 - 4 \frac{K_b K + 2r\omega_0 R_a}{L_a J}} \right)$$

Si nota come la parte reale degli autovalori sia sempre negativa quindi il sistema è stabile se:

$$\frac{K_b K}{R_a} + 2r\omega_0 > 0$$

Inoltre, a seconda che il radicando sia maggiore o minore di zero, i due autovalori stabili si possono presentare puramente reali (negativi) o complessi coniugati.

Se invece:

$$\frac{K_b K}{R_a} + 2r\omega_0 < 0$$

il sistema presenta una forma di instabilità statica messa in evidenza dal fatto che un autovalore risulta con parte reale positiva.

Ad analoghe conclusioni si può giungere considerando l'equazione:

$$J\dot{\omega} = C_m(\omega) - C_r(\omega)$$

ossia considerando le curve caratteristiche ad una assegnata tensione e_a .

Definita ω_0 dall'equazione:

$$C_m(\omega_0) - C_r(\omega_0) = 0$$

è possibile effettuare l'analisi di stabilità linearizzando nell'intorno della velocità angolare trovata, ottenendo pertanto:

$$J\dot{\omega} = C_m(\omega_0) + \left(\frac{\partial C_m}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) - C_r(\omega_0) - \left(\frac{\partial C_r}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

da cui

$$J\dot{\bar{\omega}} = \left(\left(\frac{\partial C_m}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} - \left(\frac{\partial C_r}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} \right) \bar{\omega}$$

che ammette come soluzione :

$$\omega = \bar{\Omega} e^{\lambda t}$$

che sostituita nell'omogenea associata

$$\left(\frac{\left(\frac{\partial C_m}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} - \left(\frac{\partial C_r}{\partial \omega} \right)_{\omega_0}}{J} - \lambda \right) = 0$$

da cui:

$$\lambda = \frac{1}{J} \left(\left(\frac{\partial C_m}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} - \left(\frac{\partial C_r}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} \right)$$

Perché il sistema si presenti come stabile l'autovalore λ , essendo reale, deve essere negativo ovvero deve essere:

$$\left(\left(\frac{\partial C_m}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} - \left(\frac{\partial C_r}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} \right) < 0$$

Ricordando l'espressione della coppia motrice:

$$C_m = \frac{K}{R_a} e_a - \frac{K K_b}{R_a} \omega$$

e quella della coppia resistente $C_r = r \omega^2$ si ottiene così la medesima condizione di stabilità:

$$\left(\left(\frac{\partial C_m}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} - \left(\frac{\partial C_r}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} \right) = \left(-\frac{K K_b}{R_a} - 2r\omega_0 \right) < 0$$