

CAPITOLO 1

Dinamica del corpo rigido

1.1 Sistemi fisici e modelli matematici

Per condurre lo studio del comportamento di un qualsiasi sistema fisico, necessario per una sua corretta progettazione e dimensionamento, sono possibili due vie: una puramente sperimentale, che consiste nella misura diretta delle proprietà fisiche che si desidera conoscere eventualmente applicando correzioni e reiterando gli esperimenti fino all'ottenimento del risultato voluto, e l'altra teorica, basata sulla soluzione con opportuni algoritmi di modelli matematici. Questi ultimi sono basati sulla descrizione e caratterizzazione del sistema fisico in un appropriato modello fisico e possono assumere gradi di complessità diversi in funzione delle ipotesi semplificative che vengono adottate, ma comunque, nel caso si voglia studiare la dinamica del sistema fisico, sono sempre costituiti da sistemi di equazioni differenziali in grado di rappresentare il cambiamento nel tempo delle proprietà fisiche che caratterizzano il sistema.

Per analisi dinamica di un sistema fisico s'intende l'insieme di operazioni che dall'identificazione del sistema fisico portano alla creazione del suo modello matematico e alla sua successiva soluzione. Con il termine di sintesi dinamica si intende, invece, la successiva indagine che può essere condotta variando i valori di alcune proprietà del modello fisico affinché alcuni parametri del sistema assumano valori prefissati.

In funzione del fenomeno principale che governa il sistema fisico riconosceremo sistemi meccanici, sistemi termici, sistemi idraulici, sistemi elettrici, sistemi elettronici ecc. e in generale si potrà vedere che i sistemi reali sono composti da più sottosistemi di natura diversa tra loro interconnessi, come è il caso del sistema di controllo di rotta per missili schematizzato nella figura 1.

Nel caso in oggetto, il cambiamento di rotta del missile viene ottenuto variando la direzione di spinta del motore razzo attraverso un attuatore idraulico che è azionato da una servovalvola azionata da un motore elettrico di coppia pilotato da un controllore, sempre più spesso di tipo digitale, utilizzando cioè un microprocessore al quale giungono tanto le informazioni sulla nuova rotta via radio oppure da una

traiettoria precostituita, quanto quelle sulla posizione del razzo attraverso le misure di opportuni accelerometri, giroscopi, GPS, ecc.

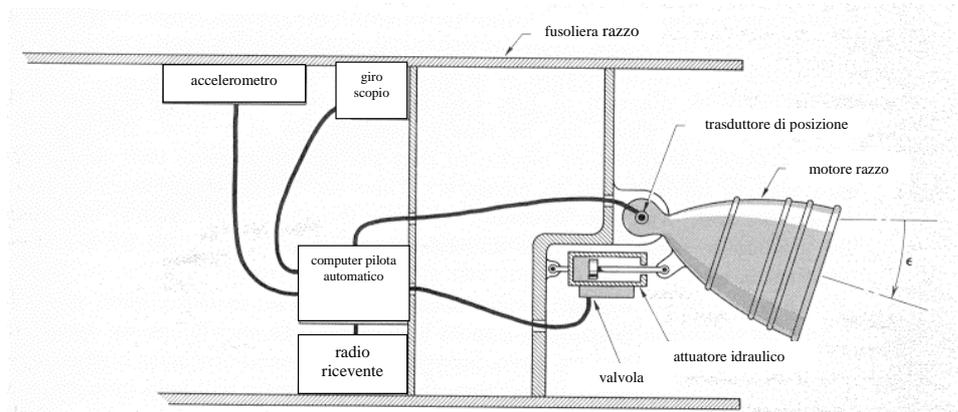


Figura 1 Modello fisico di un sistema di guida per razzi

Il corso di Dinamica dei sistemi aerospaziali ha principalmente per oggetto lo studio della dinamica dei sistemi meccanici e delle macchine in particolare, ove per macchina s'intende quel particolare sistema atto sia a trasformare energie di forme diverse in energia meccanica, sia a utilizzare i vari tipi di energia per realizzare una funzione come negli aeromobili che costituiscono l'oggetto principale del corso di studi in Ingegneria Aerospaziale.

I modelli matematici ai quali perverremo si traducono, come detto, in una serie di equazioni differenziali, dette anche "equazioni di moto", che legano le azioni agenti sul sistema reale al suo moto.

1.2 I sistemi meccanici

Nel corso di Meccanica Razionale si sono studiati i metodi per condurre l'analisi cinematica e dinamica di un punto materiale e di un corpo rigido, spesso elementi di base di sistemi meccanici più complessi. Qualsiasi sistema meccanico reale può, infatti, essere schematizzato come un sistema fisico ideale formato dall'insieme di punti materiali e di corpi rigidi, tra loro connessi da opportuni vincoli, al fine di realizzare lo scopo per il quale si è realizzata la macchina.

1.2.1 *Gradi di libertà*

L'analisi dinamica dei sistemi reali necessita della conoscenza del numero di gradi di libertà posseduti dagli stessi ovvero le possibilità di moto libere e non condizionate dai vincoli. Al fine di definire lo stato di un sistema è infatti necessario identificare un numero di parametri, pari ai gradi di libertà, che possono variare indipendentemente: tali parametri vengono definiti variabili indipendenti.

Il corso di Meccanica Razionale ha messo in luce come al fine di individuare la posizione nello spazio di un punto materiale siano necessarie tre coordinate, mentre se si confina la giacitura ad un piano tali coordinate si riducono a due. Conseguentemente, le variabili indipendenti per l'analisi dinamica di un punto materiale nello spazio saranno tre (o due nel caso di moto piano).

Per il corpo rigido libero, ovvero un corpo dotato di dimensioni non trascurabili, al fine di identificare la sua posizione nello spazio, sono necessarie sei coordinate libere che spesso vengono ricondotte alla posizione di un punto appartenente al corpo e a tre angoli che ne forniscono l'orientamento nello spazio.

Analogamente passando al piano, saranno sufficienti tre coordinate libere, ovvero tre gradi di libertà, per caratterizzarne la posizione.

1.2.2 *Gradi di vincolo*

Come detto, i sistemi meccanici sono in generale costituiti da un insieme di più corpi rigidi opportunamente vincolati tra di loro. Tali vincoli impediscono alcune tra le possibilità di singoli componenti del sistema ovvero creano dei legami tra lo stato dei vari componenti e le variabili indipendenti scelte.

Ad esempio, già la condizione di rigidità di un corpo rigido deve essere vista come un vincolo. In realtà infatti ogni corpo è deformabile sotto l'azione delle forze che agiscono su di esso. Ipotizzare tale deformabilità trascurabile implica imporre che durante la dinamica non vari la distanza tra due punti arbitrari solidali al corpo stesso. Tale vincolo si traduce nel fatto che per identificare la posizione di tutti i punti appartenenti al corpo rigido stesso è sufficiente identificare sei parametri indipendenti (tre nel caso di moto piano) e che per tutti gli altri punti del corpo sarà possibile scrivere dei legami tra gli spostamenti e le variabili indipendenti.

Se il sistema è invece composto da n corpi (meccanismo) possiede, prima dell'applicazione dei vincoli, $3n$ gradi di libertà. L'introduzione di vincoli tra i corpi e con un membro fisso (o telaio), riduce il numero dei gradi di libertà del sistema. Tale

riduzione dei gradi di libertà implica l'esistenza di legami tra le varie posizioni caratteristiche del sistema e le variabili indipendenti.

Rimane necessario, quindi, come primo passo dell'analisi, il computo del numero dei gradi di libertà (o gradi di mobilità) del sistema.

A titolo di esempio, nel caso di meccanismi piani, con sole coppie inferiori (a esempio cerniere, pattini e carrelli), in cui i collegamenti siano solo di tipo binario, ossia ogni vincolo collega solo due elementi, si definisce la regola di Gumbel, per il calcolo del grado di mobilità del sistema. Detto c_1 il numero di vincoli che sopprimono un solo grado di libertà (vincolo tipo carrello), e c_2 il numero di vincoli che sopprimono due gradi di libertà, (vincolo tipo cerniera o pattino), si ha:

$$(1.1) \quad n_{gdl} = 3 \times n - c_1 - 2 \times c_2$$

essendo n il numero di corpi rigidi componenti il meccanismo, escluso il telaio, e n_{gdl} il suo numero di gradi di libertà (o di mobilità).

1.2.3 Variabili fisiche

L'analisi dinamica di un sistema, una volta noto il numero di gradi di libertà di cui esso gode, richiede la scrittura e la soluzione delle equazioni di moto e quindi, nel caso di un sistema meccanico, l'identificazione delle forze agenti su di esso.

Poiché alcune delle forze agenti possono essere funzione delle grandezze cinematiche del punto di applicazione, è conseguentemente opportuno definire, oltre alle variabili indipendenti di un sistema, anche altre variabili, dette *variabili fisiche*, che permettano di definire posizione, velocità o accelerazione di questi punti d'applicazione in modo da rendere agevole la scrittura delle equazioni di moto. Tali variabili sono, per quanto detto, funzione dalle variabili indipendenti attraverso dei legami geometrici.

Con riferimento al sistema della figura 2, a esempio, il meccanismo piano è composta dai due corpi rigidi m_1 e m_2 che possono solo traslare sui due rispettivi piani d'appoggio, ovvero dei sei gradi di libertà del sistema libero, i piani d'appoggio si comportano come due pattini sopprimendo, rispettivamente, due gradi di libertà per ogni corpo rigido, ovvero dalla (1.1):

$$(1.2) \quad n_{gdl} = 3 \times 2 - 2 \times 2 = 2$$

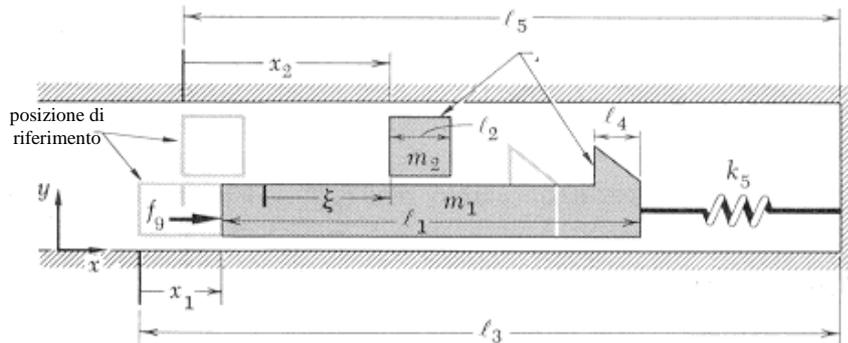


Figura 2 Un sistema meccanico a due gradi di libertà

Quindi, per definire in ogni istante la configurazione del sistema sarà sufficiente scegliere come variabili indipendenti due coordinate (a esempio x_1 e x_2), e stabilirne l'origine e il verso positivo nel quale sono misurate.

Qualsiasi altra variabile fisica, a esempio la posizione relativa ξ della massa m_2 rispetto alla slitta m_1 , risulta dipendente dalle variabili indipendenti scelte. Infatti, dall'analisi della geometria del sistema, si ricava che :

$$(1.3) \quad \xi = x_2 - x_1$$

ovvero un legame tra variabile fisica ξ e le variabili indipendenti adottate.

Sempre in riferimento alla figura sovrastante l'azione esercitata dalla molla k_5 dipende dalla sua elongazione, rispetto alla posizione di molla scarica, per cui può risultare conveniente l'utilizzo di un'altra variabile fisica per definire la deformazione della molla rispetto alla condizione di molla scarica.

1.3 Equazioni di moto: equilibri dinamici

Come noto l'equilibrio di un sistema meccanico in condizioni di quiete può essere studiato mediante le equazioni cardinali della statica.

A esempio, nel caso di un corpo rigido libero nel piano, dotato quindi di tre gradi di libertà, soggetto ad un generico sistema di forze esterne, il sistema di equazioni di equilibrio equivale a tre equazioni scalari indipendenti (due componenti per il risultante \vec{R} di tali forze, ed una sola componente per l'equazione del loro

momento \vec{M} rispetto a un polo qualsivoglia), in numero eguale al numero dei gradi di libertà del corpo ovvero:

$$(1.4) \quad \begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M} = 0 \end{cases}$$

che proiettate sui due assi cartesiani danno luogo al sistema di equazioni pure:

$$(1.5) \quad \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

Nel caso di un sistema composto da più corpi tra loro connessi, le equazioni cardinali della statica applicate all'intero sistema costituiscono condizione solo necessaria e occorre in tal caso o separare i corpi che costituiscono il sistema e scriverle per ognuno di essi, includendo quindi anche le reazioni vincolari scambiate tra i corpi stessi, oppure considerare, oltre alle equazioni cardinali applicate al sistema completo, ulteriori equazioni di equilibrio riguardanti le mobilità relative tra i corpi che costituiscono il sistema meccanico nel suo complesso.

La dinamica di un sistema meccanico è definita attraverso relazioni che intercorrono tra moto del sistema (in termini di accelerazioni subite dai diversi punti del sistema) e forze agenti: sono possibili due approcci allo studio della dinamica, uno basato sulle equazioni di equilibrio di *D'Alembert*, che possono essere considerate il duale dinamico delle equazioni cardinali della statica, il secondo basato su un approccio energetico, che consiste nell'applicazione sia del *principio dei lavori virtuali*, d'ora in poi PLV, sia del teorema di *Lagrange* o di quello dell'*energia cinetica*.

Vale infine la pena di osservare che nel legame tra le forze agenti su un sistema e le corrispondenti accelerazioni, gioca un ruolo fondamentale la definizione delle caratteristiche meccaniche del sistema: pertanto utilizzeremo nello studio della dinamica tutte le nozioni relative alla geometria delle masse che sono state oggetto del corso di Meccanica Razionale.

Nel caso di un punto materiale vincolato di massa m , la legge di Newton (terza legge della Dinamica) afferma che l'accelerazione subita dal punto risulta legata al risultante \vec{F} di tutte le forze attive e reattive agenti sul corpo attraverso la relazione:

$$(1.6) \quad m\vec{a} = \vec{F} = \vec{R} + \vec{\Psi}$$

dove $\vec{\Psi}$ è la *reazione vincolare* che traduce l'azione del vincolo, mentre \vec{R} è il risultante delle sole forze *attive*.

Definendo come *forza d'inerzia* la quantità:

$$(1.7) \quad \vec{F}_i = -m\vec{a}$$

pari al prodotto della massa per l'accelerazione del punto e agente in verso opposto a quest'ultima, l'equazione di moto (1.6) può essere riscritta sotto la forma di una equazione di equilibrio equivalente:

$$(1.8) \quad \vec{F} + \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{R} + \vec{\Psi} + \vec{F}_i = 0$$

ossia il problema dinamico può essere sempre ricondotto a un problema statico equivalente, a condizione di aggiungere al risultante delle forze attive e reattive anche la forza di inerzia.

Questa affermazione, rappresentata matematicamente dalla equazione (1.8), costituisce l'enunciato del principio di D'Alembert nel caso del punto materiale. L'applicazione di tale principio risulta molto più significativa nel caso del corpo rigido, e dei sistemi di corpi rigidi.

1.3.1 Dinamica del corpo rigido

Consideriamo, infatti, il caso di un corpo rigido, cioè di un sistema discreto o continuo di punti materiali ai quali è imposto il vincolo della rigidità, dotato di dimensioni non trascurabili. In questo caso, il principio di D'Alembert, rappresentato per il singolo punto materiale dalla (1.6), può essere scritto per ciascun punto del corpo, che potremo quindi considerare soggetto ad una distribuzione continua di forze di inerzia, tali per cui la forza d'inerzia infinitesima agente sul generico punto di massa dm sia definita dalla:

$$(1.9) \quad d\vec{F}_i = -dm\vec{a}$$

Definita questa distribuzione di forze, potremo dire che il moto del corpo dovrà soddisfare le equazioni che ne definiscono l'equilibrio dinamico sotto l'azione delle

forze (attive e reattive) agenti su di esso oltre a quelle di inerzia così introdotte. Nel caso del corpo rigido è possibile ridurre l'intero sistema di forze d'inerzia distribuite ad un *risultante* \vec{F}_i più una *coppia d'inerzia* \vec{C}_i che possono essere espressi in funzione dell'accelerazione del baricentro e dell'accelerazione angolare del corpo stesso.

Di conseguenza le equazioni vettoriali che descrivono il moto del corpo rigido possono essere scritte nella forma (1.4), nelle quali si dovrà però includere il termine aggiuntivo dovuto alle forze di inerzia, ovvero:

$$(1.10) \quad \begin{cases} \vec{F} + \vec{F}_i = 0 \\ \vec{M} + \vec{C}_i + (G - O) \wedge \vec{F}_i = 0 \end{cases}$$

dove \vec{F} è il risultante delle forze attive e reattive, mentre \vec{M} è il loro momento rispetto a un polo O .

Il problema dinamico è quindi ricondotto, ancora una volta, a un problema statico equivalente, a condizione di essere in grado di calcolare il risultante \vec{F}_i delle forze di inerzia $d\vec{F}_i$ agenti sul corpo e il loro momento risultante rispetto al polo O considerato.

Questo calcolo risulta in genere molto complesso per un corpo deformabile, ma per i corpi rigidi, oggetto di questo corso, vale una regola generale che possiamo ricavare attraverso un esempio.

1.3.2 Dinamica di un corpo rigido con spessore trascurabile e con un punto fisso

Indichiamo con ω e $\dot{\omega}$ rispettivamente la velocità e l'accelerazione angolare imposte al corpo rigido di spessore trascurabile e incernierato in O . L'analisi cinematica insegna che tutti i punti del corpo rigido descrivono una traiettoria circolare intorno al punto fisso O .

Facendo riferimento alla terna intrinseca, è possibile mettere in evidenza la componente normale e tangenziale della forza d'inerzia agente sul generico punto materiale del corpo rigido

Integrando sull'intero volume si ottiene:

$$(1.11) \quad \vec{F}_i = - \int_V \rho dV \underbrace{\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)]}_{\vec{a}_n} - \int_V \rho dV \underbrace{\vec{\omega} \wedge (P - O)}_{\vec{a}_t} = -m\vec{a}_G$$

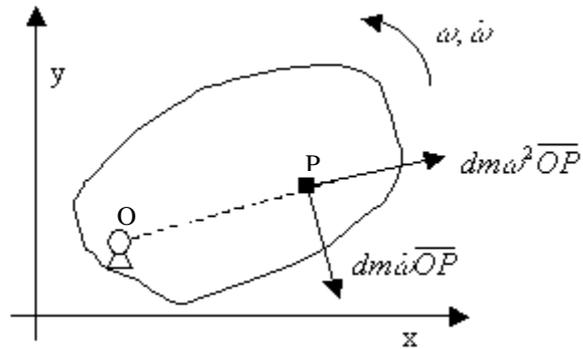


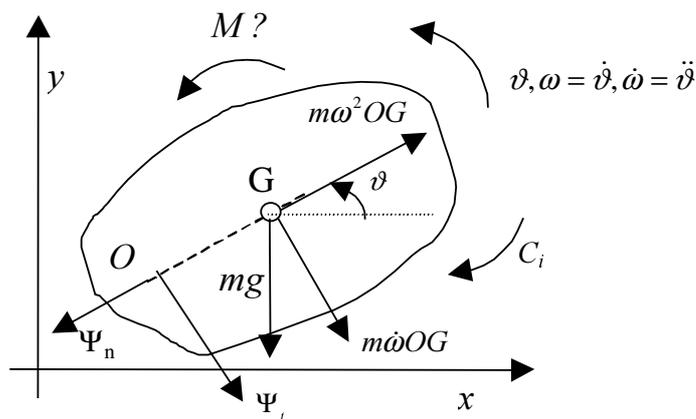
Figura 3 Componenti della forza d'inerzia agente sul punto P di un corpo rigido con un punto fisso

dove la seconda eguaglianza vale in virtù del *principio di moto del baricentro*, punto al quale è applicato il risultante \vec{F}_i , mentre la coppia d'inerzia è pari a:

$$(1.12) \quad \vec{C}_i = -J_G \vec{\omega}$$

dove J_G è il momento d'inerzia baricentrico:

$$(1.13) \quad J_G = \int_V \rho dV (G-P)^2$$



Sostituendo ai vincoli le corrispondenti reazioni vincolari, è possibile quindi scrivere le equazioni pure di equilibrio dinamico del corpo rigido:

$$(1.14) \quad \begin{cases} m\dot{\omega}\overline{OG} + \Psi_t + mg \cos \vartheta = 0 \\ m\omega^2\overline{OG} - \Psi_n - mg \sin \vartheta = 0 \\ M - m\dot{\omega}\overline{OG}^2 - J_G\dot{\omega} - mg\overline{OG} \cos \vartheta = 0 \end{cases}$$

che conducono a un problema univocamente determinato di tre equazioni nelle tre incognite Ψ_t , Ψ_n , M . E' così possibile, quindi, note la velocità e l'accelerazione angolare ω e $\dot{\omega}$ del corpo, determinare la coppia motrice M , necessaria.

Calcolata, così, la coppia motrice, se volessimo dimensionare l'organo meccanico, schematizzato come corpo rigido, valutando le azioni interne agenti, non è più possibile utilizzare il *sistema equipollente delle forze d'inerzia*, costituito dalle (1.11) e (1.12), ma dobbiamo utilizzare la reale distribuzione delle azioni d'inerzia.

Si consideri, infatti, l'esempio di figura 4, in cui l'asta omogenea, di densità ρ , sezione A e lunghezza l , è vincolata, per semplicità, a ruotare nel piano orizzontale attorno alla cerniera O .

Per valutare il momento M necessario a imporre una velocità e accelerazione angolare volute dal progetto, è sufficiente, come visto, scrivere l'equilibrio dei momenti rispetto al polo O :

$$(1.15) \quad M - m\dot{\omega}\overline{OG}^2 - J_G\dot{\omega} = 0$$

Si noti che la (1.15) è del tutto equivalente, raccogliendo a fattore comune $\dot{\omega}$, a:

$$(1.16) \quad M - (J_G + m\overline{OG}^2)\dot{\omega} = 0$$

che, ricordando il teorema di trasporto del momento d'inerzia tra assi paralleli, la **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**, si riduce alla ben nota:

$$(1.17) \quad M - J_O\dot{\omega} = 0$$

cioè alla equazione di moto di un corpo rigido attorno a un asse fisso.

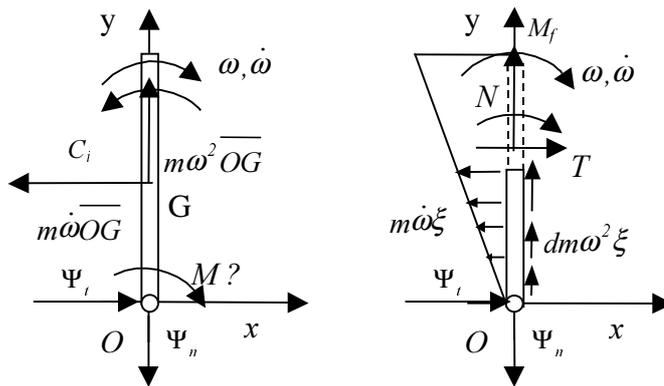


Figura 4 Sistema equipollente delle forze d'inerzia (a sinistra) e loro reale distribuzione (a destra) in un'asta incernierata a un estremo

Si è effettuato l'elencazione dei passaggi per giungere alla **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**, volendo ricordare che l'uso della stessa non deve far dimenticare che ciò significa immaginare che il vettore forza d'inerzia è considerato applicato direttamente sull'asse, ma è sempre presente e non deve essere dimenticato nel calcolo delle reazioni vincolari.

Le altre due equazioni pure permettono, invece, il calcolo della reazione nelle sue due componenti tangente e normale alla traiettoria circolare del baricentro:

$$(1.18) \quad \begin{cases} \Psi_t - \rho A \dot{\omega} \frac{l^2}{2} = 0 \\ -\Psi_n + \rho A \omega^2 \frac{l^2}{2} = 0 \end{cases}$$

Volendo calcolare le azioni interne normali N , di taglio T e flettenti M_f in una generica sezione distante a dalla cerniera, dobbiamo tener conto della distribuzione triangolare delle azioni d'inerzia scomposte nelle due componenti normali e tangenziali, ovvero:

:

$$(1.19) \quad \begin{cases} N(a) - \Psi_n + \int_0^a \rho A \omega^2 \xi d\xi = 0 \\ T(a) + \Psi_t - \int_0^a \rho A \dot{\omega} \xi d\xi = 0 \\ M_f(a) + M - \int_0^a \rho A \dot{\omega} \xi^2 d\xi = 0 \end{cases}$$